دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

روابط کراندار و رابطه‌ی آن‌ها با روابط بازگشتی مقدماتی

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

پژوهشگر

الهه رکنی

۱۳۹۶

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

روان پاک مادر عزیزم،

و همسرم که نشانه‌ی زمینی لطف آسمانی در زندگی من است.

بنام خدا

به شکر ایزد و استاد در مقام سجود   نهاده سر به زمین همچو کلک و پرگارم

(خاقانی)

حمد و سپاس ارزانی بارگاه حضرت احدیت که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی پورمهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر **هژیر حومه‌ای** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی و کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

بوسه بر دستان خانواده‌ام می‌زنم که صبورانه رنج سال‌های تحصیل مرا تحمل کردند واندرز های‌شان همیشه روشنگر راهم بوده و خواهد بود انشاالله.

و سپاس فراوان از همسر مهربانم که وجودش التیام‌بخش لحظه‌های سختی بود که سپری شد و عاشقانه مرا در این راه یاری کرد.

الهه رکنی

۱۳۹۶

نام خانوادگی دانشجو: رکنی نام: الهه

عنوان: روابط کراندار و رابطه‌ی آن‌ها با روابط بازگشتی مقدماتی

استاد راهنما : دکتر سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور : دکتر هژیر حومئی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۶ تعداد صفحات: ۴۸

کلید واژه‌ها: بازگشتی مقدماتی، نمایش‌پذیری، اثبات‌پذیری، نظریه‌های حساب، ناتمامیت.

چکیده

گودل در مقاله‌ی مشهور خود در مورد قضایای ناتمامیت، توابع بازگشتی مقدماتی را معرفی نموده و از آن‌ها برای حسابی‌سازی نحو استفاده کرد. بیشتر مفاهیم نحوی توسط فرمول‌های کراندار تعریف‌پذیر هستند و می‌دانیم که روابط تعریف‌پذیر توسط فرمول‌های کراندار، بازگشتی مقدماتی می‌باشند. اما عکس این مطلب صحیح نیست، با اینکه در بسیاری از منابع به این موضوع اشاره نشده و در برخی از کتاب‌ها مطالب نادرستی در مورد این موضوع نوشته شده‌اند. در این پایان نامه که بر اساس مقاله‌های زیر نگارده شده است، اثباتی مقدماتی برای این حقیقت که هر رابطه بازگشتی مقدماتی لزوماً تعریف‌پذیر توسط فرمولی کراندار نیست، آورده شده است.

- S. A. Volkov، *On the Class of Skolem Elementary Functions*, **Journal of Applied and Industrial Mathematics** 4:4 (2010) 588 – 599.

- Henri-Alex Esbelin & Malika More, *Rudimentary Relations and Primitive Recursion: A Toolbox*, **Theoretical Computer Science** 193:1 – 2 (1998) 129 – 148.

فهرست مطالب

مقدمه

کورت گودل[۱] در مقاله مشهور خود ([۴]) که در سال ۱۹۳۱ میلادی منتشر شد دو مفهوم غیرعادی را جهت اثبات قضیه (اول) ناتمامیت معرفی کرد: توابع بازگشتی مقدماتی و نظریه‌های ωـ سازگار. بعدها دو کلک(حقه) مشهور منطق ریاضی غیرلازم بودن این دو تعریف را آشکار ساخت: کلک راسِر[۲] [۱۷] و کلک کرِیگ[۳] [۲]. کلک راسر نشان داد که شرط ωـ سازگاری را می‌توان به سازگاری ساده (اثبات‌ناپذیری تناقض در نظریه) تقلیل داد. کلک کریگ نشان داد که هر نظریه شمارای کارآمد (یا به طور معادل Σ_1ـ تعریف‌پذیر) دارای یک مجموعه از اصول Δ_0ـ تعریف‌پذیر است. پس ناتمامیت نظریه‌های ωـ سازگار بازگشتی مقدماتی در برهان گودل را می‌توان به طور کلی‌تر برای ناتمامیت نظریه‌های سازگار و Δ_0ـ تعریف‌پذیر (که شامل حساب رابینسون Q) هستند، تعمیم داد.

در حقیقت، مفهوم بازگشت مقدماتی در دو جا در برهان گودل برای قضیه ناتمامیت ظاهر می‌شود:

۱. نظریه مورد نظر بازگشتی مقدماتی باشد (یعنی بتواند توسط مجموعه‌ای بازگشتی مقدماتی از جملات اصل‌بندی گردد)؛ و

۲. نظریه قادر به نمایش تمامی توابع بازگشتی مقدماتی باشد.

آنچه که گودل در نظر داشت مطابقت توابع بازگشتی مقدماتی با توابع به طور شهودی محاسبه‌پذیر

[۱] K. Gödel

[۲] J. B. Rosser

[۳] W. Craig

بود. بعداً با کارهای کلینی[۴] [۱۱]، [۱۲] (و نیز اکرمن[۵]) معلوم گردید که توابعی وجود دارند که به طور شهودی محاسبه‌پذیر بوده ولی بازگشتی مقدماتی نیستند (به وضوح تمامی توابع بازگشتی مقدماتی به طور شهودی محاسبه‌پذیر می‌باشند). امروزه فرضیه چِرچ بیان می‌کند که توابع به طور شهودی محاسبه‌پذیر همان توابع بازگشتی هستند که اکیداً شامل توابع بازگشتی مقدماتی می‌باشند. همینطور اکنون می‌دانیم که نظریه‌هایی که قادر به نمایش توابع بازگشتی مقدماتی هستند می‌توانند توابع بازگشتی را نیز نمایش دهند. پس کاربرد دوم گودل از توابع بازگشتی مقدماتی را نیز می‌توان به نمایش توابع بازگشتی (جزئی) تعمیم داد. آنچه که اکنون از آن ابتکار گودل باقی مانده، این است که معمولاً توابع بازگشتی را توسط توابع بازگشتی مقدماتی تعریف می‌کنند. ولی باز هم می‌دانیم که توابع بازگشتی را می‌توان بدون ارجاع به توابع بازگشتی مقدماتی تعریف کرد (به عنوان مثال [۱۴] و [۷] را ببینید).

کلاس مجموعه‌های بازگشتی مقدماتی شامل کلاس مجموعه‌های Δ_0ـ تعریف‌پذیر بوده و مشمول در کلاس مجموعه‌های بازگشتی (تصمیم‌پذیر) است. با برهان قطری می‌توان دید که شمول این کلاس در مجموعه‌های تصمیم‌پذیر اکید بوده و در این پایان‌نامه خواهیم دید که شمول دیگر نیز اکید است (پس هیچ تساوی بین کلاس مجموعه‌های بازگشتی مقدماتی، کلاس مجموعه‌های Δ_0ـ تعریف‌پذیر و کلاس مجموعه‌های به طور بازگشتی تصمیم‌پذیر وجود ندارد).

[۴] S. C. Kleene

[۵] W. Ackermann

فصل ۱

توابع بازگشتی مقدماتی و Δ_0ـ تعریف‌پذیری

۱.۱ توابع بازگشتی مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. کلاس **P.R.** شامل همه ی توابع بازگشتی مقدماتی $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ به استقراء به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $Z(x) = 0 \in \mathbf{P.R.}$
- $S(x) = x + 1 \in \mathbf{P.R.}$
- $P_i^n(x_1, ..., x_n) = x_i \in \mathbf{P.R.}$
- $g, h_1, ..., h_m \in \mathbf{P.R.}$ $\;and\;$ $f(\overline{x}) = g\big(h_1(\overline{x}), ..., h_m(\overline{x})\big) \Longrightarrow f \in \mathbf{P.R.}$
- $g, h \in \mathbf{P.R.}$ and
$$\begin{cases} f(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) \\ f(\overline{x}, y+1) = h\big(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y)\big) \end{cases} \Longrightarrow f \in \mathbf{P.R.}$$

تعریف ۲.۱.۱. رابطه‌ی $P \subseteq \mathbb{N}^k$ بازگشتی مقدماتی است، هرگاه

$$\chi_{P}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 \text{ if } \overline{x} \in P \\ 0 \text{ if } \overline{x} \notin P \end{cases} \in \textbf{P.R.}$$

لم ۳.۱.۱. *توابع علامت، جمع و ضرب بازگشتی مقدماتی بوده و روابط بازگشتی مقدماتی تحت اعمال بولی (اجتماع، اشتراک و متمم‌گیری) بسته هستند.*

برهان. داریم

$$+: \begin{cases} x + 0 = x \\ x + Sy = S(x+y) \end{cases} \in \textbf{P.R.}$$

$$\times: \begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot Sy = x \cdot y + x \end{cases} \in \textbf{P.R.}$$

$$\mathsf{sg}(\mathsf{x}) = \begin{cases} 0 \text{ if } x = 0 \\ 1 \text{ if } x \neq 0 \end{cases}, \ \overline{\mathsf{sg}} = \begin{cases} 1 \text{ if } x = 0 \\ 0 \text{ if } x \neq 0 \end{cases} \in \textbf{P.R.}$$

► $\chi_{P\cup Q} = \chi_{P} \times \chi_{Q}$ ► $\chi_{P^{\complement}} = \overline{\mathsf{sg}}(\chi_{P})$

► $\chi_{P\cap Q} = \mathsf{sg}(\chi_{P} + \chi_{Q})$ ► $\chi_{P-Q} = \chi_{P} \times \overline{\mathsf{sg}}(\chi_{Q})$

□

لم ۴.۱.۱. *روابط بازگشتی مقدماتی تحت سورهای کراندار بسته هستند.*

برهان. از روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \chi_{\forall x \leqslant \alpha P(\overline{z},x)}(\overline{z},0) = \chi_{P}(\overline{z},0) \\ \chi_{\forall x \leqslant \alpha P(\overline{z},x)}(\overline{z},\alpha+1) = \chi_{\forall x \leqslant \alpha P(\overline{z},x)}(\overline{z},\alpha) \times \chi_{P}(\overline{z},\alpha+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_{\exists x \leqslant \alpha P(\overline{z},x)}(\overline{z},0) = \chi_{P}(\overline{z},0) \\ \chi_{\exists x \leqslant \alpha P(\overline{z},x)}(\overline{z},\alpha+1) = \mathsf{sg}\big(\chi_{\exists x \leqslant \alpha P(\overline{z},x)}(\overline{z},\alpha) + \chi_{P}(\overline{z},\alpha+1)\big) \end{cases}$$

□

۲.۱ Δ_0ـ فرمول‌ها و Δ_0ـ تعریف‌پذیری

تعریف ۱.۲.۱. کلاس Δ_0 متشکل از فرمول‌های کراندار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta_0 := | \ ATOMS \ | \ \Delta_0 \wedge \Delta_0 \ | \ \Delta_0 \vee \Delta_0 \ | \ \Delta_0 \to \Delta_0 |$$
$$\neg\Delta_0 \ | \ \forall x \leqslant y \Delta_0(\overline{z}, x, y) \ | \ \exists x \leqslant y \Delta_0(\overline{z}, x, y) \ |$$

تعریف ۲.۲.۱ (توابع Δ_0ـ تعریف پذیر). تابع f، Δ_0ـ تعریف‌پذیر است هرگاه:
وجود داشته باشد $\theta(\overline{x}, y) \in \Delta_0$ به طوریکه $f(\overline{a}) = b \Longleftrightarrow \mathbb{N} \models \theta(\overline{a}, b)$.

لم ۳.۲.۱. *تمامی محمولات Δ_0ـ تعریف‌پذیر، بازگشتی مقدماتی هستند. یعنی برای هر Δ_0ـ فرمول θ داریم:*

$$\{ \ \overline{a} \mid \mathbb{N} \models \theta(\overline{a}) \ \} \in \boldsymbol{P.R.}$$

سؤال ۴.۲.۱. آیا هر تابع Δ_0ـ تعریف‌پذیر بازگشتی مقدماتی است؟

سؤال ۵.۲.۱. آیا هر تابع بازگشتی مقدماتی Δ_0ـ تعریف‌پذیر است؟

تعریف ۶.۲.۱. برای تابع $f : X \to Y$ گراف آن $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
$\Gamma_f = \{\langle x, y\rangle | f(x) = y\}$.

لم ۷.۲.۱. $f \in \boldsymbol{P.R.} \Longrightarrow \Gamma_f \in \boldsymbol{P.R.}$.

برهان. $\chi_{\Gamma_f}(\overline{a}, b) = \chi_{=}\big(f(\overline{a}), b\big) = \overline{sg}\big(|f(\overline{a}) - b|\big)$. $\square$

سؤال ۸.۲.۱. آیا $\Gamma_f \in \mathbf{P.R.} \Longrightarrow f \in \mathbf{P.R.}$؟

نکته ۹.۲.۱. میدانیم که:

$\Gamma_f \in \mathbf{P.R.} \Longrightarrow f \in \mathbf{Rec.}$ چون $f(\overline{a}) = \mu y.\Gamma_f(\overline{a}, y).$

لم ۱۰.۲.۱. $R \in \Delta_0 \Longleftrightarrow \chi_R \in \Delta_0$.

برهان. داریم:

$$\Gamma_{\chi_R}(\overline{x}, y) \equiv \big(y = 1 \wedge R(\overline{x})\big) \vee \big(y = 0 \wedge \neg R(\overline{x})\big)$$
$$R(\overline{x}) \Longleftrightarrow \chi_R(\overline{x}) = 1 \Longleftrightarrow \Gamma_{\chi_R}(\overline{x}, 1)$$

□

در کتاب [۶] به اشتباه آمده است که:

~~«رابطه‌ای بازگشتی مقدماتی است اگر و تنها اگر توسط Δ_0ـ فرمولی قابل تعریف باشد.»~~

~~«**تمرین ۶.۸ (ص ۳۸۶)** ثابت کنید که یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر D از $\mathbb{N}$ توسط یک Δ_0ـ فرمول، تعریف‌پذیر است اگر و تنها اگر D بازگشتی مقدماتی باشد.»~~

ولی در جزوه‌ی درسی [۱] آمده است که:

مثال ۱۱.۲.۱. رابطه‌ی $x|y$ یک رابطه‌ی Δ_0 است. $x|y \Leftrightarrow \exists z \leq y\ (y = zx)$

تذکر ۱۲.۲.۱. هر رابطه‌ی Δ_0ـ تعریف‌پذیر توسط یک ماشین تورینگ تصمیم‌پذیر است، جایی‌که ورودی‌ها با اعداد دودودویی نمایش داده می‌شوند.

لم ۱۳.۲.۱. Δ_0 *رابطه‌ها تحت* $\neg ,\vee ,\wedge$ *و سورهای کراندار* $\forall \leqslant$ *و* $\exists \leqslant$ *بسته هستند.*

لم ۱۴.۲.۱. *هر رابطه‌ی* Δ_0*ـ تعریف‌پذیر، بازگشتی مقدماتی است.*

برهان. با استقرای ساختاری روی فرمول‌های کراندار. از آنجا که طبق لم قبل، روابط بازگشتی مقدماتی تحت اعمال بولی و سورهای کراندار بسته هستند. □

تذکر ۱۵.۲.۱. عکس لم فوق برقرار نیست. این ادعا توسط یک برهان قطری نشان داده می‌شود. برای اشخاصی که با نظریه پیچیدگی آشنا هستند، می‌توانیم این موضوع را به طریق زیر روشن کنیم. همانطور که در بالا اشاره شد تمامی روابط $\mathbf{\Delta}_0$ می‌توانند در فضای خطی روی یک ماشین تورینگ

شناخته شوند. از طرفی از قضیه‌ی ریچی[۱] ـ کبهام[۲] نتیجه می‌شود که تمام روابطی که در فضایی که توسط یک تابع بازگشتی مقدماتی از طول ورودی محدود شده‌است شناخته می‌شوند، بازگشتی مقدماتی هستند. در حالت خاص روابطی که در فضای n^2 (nطول ورودی است) شناخته می‌شوند، بازگشتی مقدماتی هستند و یک برهان قطری مستقیم نشان می‌دهد که روابطی وجود دارند که در فضای n^2 قابل شناسایی هستند ولی در فضای خطی قابل شناسایی نیستند. پس این روابط $\mathbf{\Delta}_0$ نیستند. به عبارت دیگر $\mathbf{\Delta}_0 \subseteq \mathrm{Space(n)} \subsetneq \mathrm{Space(n^2)} \subseteq \mathbf{P.R.}$.

سؤال ۱.۲.۱۶. بازگشتی مقدماتی $\Longleftarrow$ Δ_0 ـ تعریف پذیری ؟

$\triangleleft$ هیچ Δ_0ـ فرمولی به نام $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ وجودندارد به طوریکه x کد گودل یک Δ_0ـ فرمول با یک متغیر آزاد $\theta(\xi)$ است که $\mathbb{N}\models \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y) \iff x$ توسط y ارضا می‌شود (یعنی $\mathbb{N}\models\theta(y)$).

◀ در غیر این‌صورت، فرض کنید $\theta(x) = \neg\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,x)$ و $m = \ulcorner\theta(x)\urcorner$. آنگاه

$$\mathbb{N}\models \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(m,m) \iff \mathbb{N}\models\theta(m) \iff \mathbb{N}\models\neg\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(m,m).$$

«قضیه تارسکی درمورد عدم تعریف‌پذیری حقایق»

نکته ۱.۲.۱۷. Δ_0 ـ تعریف‌پذیری، بازگشتی مقدماتی است.

ویژگی‌های ترم بودن بازگشتی مقدماتی است. (همچنین Δ_0 است.)

فرمول کراندار بودن بازگشتی مقدماتی است. (همچنین Δ_0 است.)

ارضا شدن یک فرمول کراندار بازگشتی مقدماتی است. (ولی Δ_0 نیست !)

◀ برای Δ_0ـ فرمول

$$\theta(\overline{y}) = Q_1x_1 \leqslant t_1(\overline{y})...Q_nx_n \leqslant t_n(\overline{y},x_1,...)\varrho(\overline{y},\overline{x}), (Q_i\in\forall,\exists)$$

چندجمله‌ای P_θ (تابع بازگشتی مقدماتی) وجود دارد به طوری‌که

$$\forall\overline{a}:\mathbb{N}\models\theta(\overline{a}) \iff \{0,1,...,\mathrm{P}_\theta(\overline{a})\}\models\theta(\overline{a}).$$

[۱] R.W.Ritchie

[۲] Cobham

بنابراین،

$$\{\langle\ulcorner\theta\urcorner,\overline{a}\rangle|\theta\in\Delta_0\ \&\ \mathbb{N}\models\theta(\overline{a})\}\in\mathbf{P.R.}-\mathbf{\Delta}_0!$$

- ادعای نویسنده [۶] که هر محمول بازگشتی مقدماتی، Δ_0 است، نادرست است!
- مثال نقض نویسنده [۱۵] در پایین، برای یک تابع غیرـ Δ_0 اما بازگشتی مقدماتی، نادرست است!

مثال ۱.۲.۱۸. (مثال نقض) ~~در حالت کلی، محمول~~ $\cancel{a^b=c}$~~، Δ_0 است. اگرچه اثبات این حقیقت بسیار سخت است $\cdots$ عکس این مطلب (که هر تابع بازگشتی مقدماتی Δ_0ـ تعریف‌پذیر است) برقرار نیست؛ به عنوان مثال می‌توان تابع ابر نمائی که سریعا رشد می‌کند و به صورت بازگشتی توسط معادلات~~ $\cancel{hex(a,0)=1}$ ~~و~~ $\cancel{hex(a,Sb)=a^{hex(a,b)}}$ ~~تعریف می‌شود را نام برد. به عبارت دیگر~~ $\cancel{hex(a,n)=a^{a^{\cdots^{a}}}}$ ~~(nـ بار). در حالیکه ثابت شده است که تابع ابرنمائی هم بازگشتی مقدماتی و هم Δ_0ـ تعریف‌پذیر است.~~

۱.۳ روابط کراندار و بازگشت مقدماتی

در [۳] ذکر شده‌است که: روابط کراندار روابطی هستند که توسط فرمول‌های مرتبه اول حساب تعریف شده‌اند، به طوری‌که تمام سورها با ترم‌هایی محدود شده‌اند. این سوال که آیا یک رابطه‌ی بازگشتی مقدماتی داده شده کراندار است یا خیر، در برخی موارد سخت است و مربوط به تعدادی سوالات باز در نظریه علوم کامپیوتر است. روابط کراندار مدت‌های زیادی مورد مطالعه قرارگرفته‌اند اما هنوز بسیار جالب هستند چون کلاسی بزرگ از روابط را تشکیل می‌دهند.

فرض کنید Δ_0 کوچکترین کلاس روابط روی اعداد صحیح شامل نمودارهای جمع و ضرب (تعریف شده در بخش قبل) باشد و تحت اعمال زیر بسته باشد:

- اعمال بولی $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow$
- تبدیلات صریح، به عنوان مثال اضافه کردن، حذف کردن، تغییر نام دادن، پس و پیش کردن و تغییر دادن متغیرها

- سورهای کراندار با متغیرها، به عنوان مثال $\forall x < y...$ به این معنی که $\forall x(x < y \to ...)$ و $\exists x < y...$ به این معنی که $\exists x(x < y \wedge ...)$.

♦ Δ_0 ناوردا (تحت بسیاری از اعمال طبیعی) است: چندین تعریف متفاوت از این کلاس روابط وجود دارد.

♦ Δ_0 تحت جایگزینی چندجمله‌ای (ترم) با یک متغیر بسته است. یعنی می‌توانیم به جای سورهای کراندار با متغیرها از سورهای کراندار توسط چندجمله‌ای‌ها (مثل $\forall x < y^2$) استفاده کنیم.

♦ Δ_0 با یک کلاس پیچیدگی محاسباتی، یک کلاس پیچیدگی توصیفی و یک کلاس بازگشتی ضعیف، متناظر است.

♦ Δ_0 بزرگ است: بیشتر روابط حسابی طبیعی کراندار هستند. به عنوان مثال فرمول زیر، مجموعه‌ی اعداد اول را تعریف می‌کند:

$$x > 1 \ \wedge\ \forall y < x\, \forall z < x\, \neg(x = y \cdot z).$$

عمدتا دو نوع رابطه وجود دارند که وضعیت آن‌ها نسبت به روابط کراندار نامعلوم است. نوع اول مربوط به نمودارهای توابع بازگشتی مقدماتی است، مخصوصا آن‌هایی که مربوط به رابطه‌های شمارش هستند. به عنوان مثال، آیا رابطه‌ی دوتایی «y، xـامین عدد اول است» کراندار است؟ در واقع این سوال که آیا Δ_0 تحت سورهای شمارشی بسته است یا خیر، هنوز حل نشده است. نوع دوم متناظر با روابطی هستند که توسط جایگزینی یک توان به جای یک متغیر به‌دست می‌آیند. به عنوان مثال، آیا رابطه‌ی یکتایی

$$\text{“}x\ \ verifies\ \ that\ \ 2^x + 1\ \ is\ \ prime\text{”}$$

کراندار است؟ توجه کنید که Δ_0 تحت جایگزینی توان با یک متغیر بسته نیست، پس در حالت کلی جواب «خیر» است. اگرچه، ارایه‌ی مثالی برای یک رابطه‌ی طبیعی حساب که کراندار نبودن آن قابل اثبات است، سخت است.

♦ Δ_0 جذاب است: روابط کراندار با بسیاری از سوالات باز در پیچیدگی حساب، نظریه‌ی مدل متناهی، حساب ضعیف و نظریه بازگشت در ارتباط هستند.

فصل ۲

سیستم زبان و حساب

در این فصل تعریفی دقیق از فرمول $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ ارایه می‌شود که با استفاده از آن درستی فرمول‌های کراندار را تعریف می‌کنیم ([۱۰]).

دنباله ها

دنباله‌های اعداد را می‌توان توسط عدددهی گودل، با اعداد رمزنگاری نمود، به‌طوری‌که $(x)_y = z$، به این معنی که عضو yام دنباله‌ی x برابر z است، رابطه‌ای با خواص زیر باشد:

$\forall x, y\ \exists! z\ \ [(x)_y = z]$

$\forall x, y\ \ [(x)_y \leqslant x]$

$\forall x\ \exists y\ \ [(y)_0 = x]$

$\forall x, y, z\ \exists w \big[\forall i < z\ ((w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x\big]$

و همگی این خواص در $\mathbb{N}$ درستند.

تعریف ۲.۰.۱.

$$lh(x) = y \longleftrightarrow (x)_0 = y$$

$$[x]_y = z \longleftrightarrow (y \geqslant lh(x)\ \wedge z = 0) \vee (y < lh(x)\ \wedge (x)_{y+1} = z)$$

بنابراین هر دنباله $[x]_0, \ldots, [x]_{l-1}$ توسط یک عدد (x) کدگذاری می‌شود در حالی که طول دنباله x برابر $l = (x)_0$ است، و $\forall i < l\ (x)_{i+1} = [x]_i$. توجه کنید که فرمول‌های $\forall x \exists ! y (lh(x) = y)$ و $\forall x, y \exists ! z ([x]_y = z)$ هر دو در $\mathbb{N}$ (و نیز به‌طور اثبات‌پذیر در PA) درست هستند و نیز $lh(x)$ و $[x]_y$ هر دو توابع بازگشتی مقدماتی هستند. از این تعریف و خواص روشن است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $x_0, \ldots, x_{n-1}$، کوچکترین z با شرط $lh(z) = n$ که دنباله $x_0, \ldots, x_{n-1}$ توسط آن کدگذاری می‌شود، وجود دارد.

تعریف ۲.۰.۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
[x_0, \ldots, x_{n-1}] = z \longleftrightarrow lh(z) = n \wedge \bigwedge_{i<n} ([z]_i = x_i) \\
\wedge \forall w < z\ (lh(w) \neq n \vee \bigvee_{i<n} [w]_i \neq x_i)
\end{aligned}
$$

پس $\{\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle \mapsto [x_0, \ldots, x_{n-1}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک خانواده از توابع بازگشتی مقدماتی است.

تعریف ۳.۰.۲. عبارت

$$x^\frown y = z$$

معادل این مطلب است که z کوچکترین عددی است که در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$lh(z) = lh(x) + lh(y) \wedge [\forall i < lh(x)\ ([z]_i = [x]_i)] \wedge [\forall j < lh(y)\ ([z]_{lh(x)+j} = [y]_j)]$$

این تعریف بیان می‌کند که $x^\frown y = z$ کد دنباله

$$[x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{lh(x)-1}, [y]_0, [y]_1, \ldots, [y]_{lh(y)-1}$$

با طول $lh(z) = lh(x) + lh(y)$ است. توجه کنید که $x \mapsto x^\frown y$ یک تابع بازگشتی مقدماتی است.

تعریف ۴.۰.۲. عبارت

$$w = \langle x \downharpoonleft y \rangle$$

معادل با این مطلب است که w کوچکترین عددی است که

$$lh(w) = y \wedge \forall i < lh(w)\ ([w]_i = [x]_i)$$

به‌طوری‌که اگر x کد دنباله

$$[x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{lh(x)-1}$$

و $y \leqslant lh(x)$ باشد آنگاه $w = \langle x \downharpoonleft y \rangle$ کوچکترین کد برای دنباله

$$\langle [x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{y-1} \rangle$$

با طول y است. توجه کنید که اگر $y > lh(x)$ باشد آنگاه (چون برای $i \geqslant lh(x)$ تعریف کردیم $[x]_i = 0$) $w = \langle x \downharpoonleft y \rangle$ کوچکترین کد برای دنباله‌ی زیر با طول y است.

$$[x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{lh(x)-1}, 0, \ldots, 0$$

تعریف بعدی، $x[y/z]$ است بدین معنی که $z < lh(x)$ کوچکترین کد برای دنباله

$$\langle [x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{z-1}, y, [x]_{z+1}, \ldots, [x]_{lh(x)-1} \rangle$$

است و اگر $z \geqslant lh(x)$ کوچکترین کد برای دنباله $[x]_0, [x]_1, \cdots, [x]_{lh(x)-1}, 0, \ldots, 0, y$ است (درحالی که دنباله، طول z دارد).

تعریف ۵.۰.۲. عبارت زیر که تابع جایگزینی را نمایش می‌دهد

$$x[y/z] = w$$

معادل با این مطلب است که w کوچکترین عددی است به طوری که

$$lh(w) = max(lh(x), z+1) \wedge\ \forall i < lh(w)\ \big[(i = z \to [w]_i = y) \wedge (i \neq z \to [w]_i = [x]_i)\big].$$

و $x[y/z]$ ‏$\langle x,y,z\rangle \mapsto$ یک تابع بازگشتی مقدماتی است.

زبان حساب را با نماد L_A مشخص می‌کنیم. در این زبان مرتبه اول

$$L_A = \{+, \times, S, 0, <\}$$

$+$ و $\times$ نمادهای تابعی دو موضعی، S یک نماد تابعی یک موضعی، 0 نماد ثابت و $<$ یک نماد رابطه‌ای دو موضعی می‌باشد. تعریف زیر را داریم:

تعریف ۶.۰.۲. L_A فرمول termseq(s)، که دنباله‌ی سازنده‌ی یک ترم را بیان می‌کند، برابر

$$\forall i < lh(s) \left\{ \begin{array}{l} ([s]_i = \ulcorner 0 \urcorner) \vee \\ ([s]_i = \ulcorner 1 \urcorner) \vee \\ \exists j \leqslant s \, \left([s]_i = \ulcorner v_j \urcorner\right) \vee \\ \exists j,k < i \, \left[[s]_i = \ulcorner([s]_i + [s]_k)\urcorner\right] \vee \\ \exists j,k < i \, \left[[s]_i = \ulcorner([s]_i \cdot [s]_k)\urcorner\right] \end{array} \right\}$$

است و $\mathsf{term}(x)$، L_A فرمول $\exists s\, \mathsf{termseq}(s ^\frown [x])$ را مشخص می‌نماید. بنابراین termseq(s) یک Δ_1 فرمول و $\mathsf{term}(x)$ یک Σ_1 فرمول است.

تعریف ۷.۰.۲. فرمول formseq(s)، که دنباله‌ی سازنده‌ی یک فرمول رابیان می‌کند، برابر

$$\forall i < lh(s) \left\{ \begin{array}{l} \exists u,v \leqslant i \, \left[\mathsf{term}(u) \wedge ([s]_i = \ulcorner(u=v)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner(u<v)\urcorner)\right] \\ \vee \exists j,k < i \, \left[[s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner\right] \\ \vee \exists j,k < i \, \left[[s]_i = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner\right] \\ \vee \exists j < i \, \left[[s]_i = \ulcorner \neg [s]_j \urcorner\right] \\ \vee \exists j < i \; \exists k \leqslant s \, \left[[s]_i = \ulcorner \exists v_k [s]_j \urcorner \vee [s]_i = \ulcorner \forall v_k [s]_j \urcorner\right] \end{array} \right\}$$

بوده، و $\mathsf{form}(x)$ برابر فرمول $\exists s\, \mathsf{formseq}(s ^\frown [x])$ است.

تعریف ۲.۰.۸. فرمول $\mathsf{formseq}_{\Delta 0}(s)$، که دنباله‌ی سازنده‌ی یک فرمول کراندار را بیان می‌کند، برابر

$$\forall i < lh(s) \left\{ \begin{array}{l} \exists u, v \leqslant s\big[\mathsf{term}(u) \ \wedge \ \mathsf{term}(v) \\ \wedge\big([s]_i = \ulcorner(u=v)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner(u<v)\urcorner\big)\big] \\ \vee\exists j,k<i \ \big[[s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner([s]_i \vee [s]_k)\urcorner\big] \\ \vee\exists j<i \ \exists k,u \leqslant s\big[\mathsf{term}(u) \wedge [s]_i = \ulcorner\exists v_k((v_k<u) \wedge [s]_j)\urcorner\big] \\ \vee\exists j<i \ \exists k,u \leqslant s\big[\mathsf{term}(u) \wedge [s]_i = \ulcorner\forall v_k(v_k<u \rightarrow [s]_j)\urcorner\big] \end{array} \right\}$$

بوده، و $\mathsf{form}_{\Delta_0}(x)$ برابر فرمول $\exists s \ \mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s \frown [x])$ است. $\mathsf{form}_{\Sigma_0}(x), \mathsf{form}_{\Pi_0}(x)$ هر دو نمادهایی دیگر برای فرمول $\mathsf{form}_{\Delta_0}(x)$ هستند.

تعریف ۲.۰.۹. فرمول $\mathsf{valseq}(y,s,t)$، که دنباله‌ی ارزش‌گذاری یک ترم را بیان می‌کند، برابر

$$\mathsf{termseq}(s) \wedge [lh(t) = lh(s)] \wedge$$

$$\forall i<lh(s) \left\{ \begin{array}{l} ([s]_i = \ulcorner 0 \urcorner \wedge [t]_i = 0) \vee \\ ([s]_i = \ulcorner 1 \urcorner \wedge [t]_i = 1) \vee \\ \exists j \leqslant s \ ([s]_i = \ulcorner v_j \urcorner \wedge [t]_j = [y]_j) \vee \\ \exists j,k<i \ \big([s]_i = \ulcorner([s]_j + [s]_k)\urcorner \wedge [t]_i = [t]_j + [t]_k\big) \vee \\ \exists j,k<i \ \big([s]_i = \ulcorner([s]_j \cdot [s]_k)\urcorner \wedge [t]_i = [t]_j \cdot [t]_k\big) \end{array} \right\}$$

است و فرمول $\mathsf{val}(x,y) = z$ برابر

$$\exists s,t \ \big[\mathsf{valseq}(y, s \frown [x], t \frown [z]) \vee (\neg\mathsf{term}(x) \wedge z = 0)\big]$$

است، بدین معنی که $\mathsf{val}(x,y) = z$ زمانی برقرار است که x عدد گودل یک ترم بوده و z ارزش ترم است درحالی که متغییر v_0 ارزش $[y]_0$ را دارد، v_1 ارزش $[y]_1$ را دارد و الی آخر. توجه کنید که برای $i \geq lh(y)$ داریم $[y_i] = 0$. بنابراین می‌توانیم انتظار داشته باشیم که $\mathsf{val}(x,y)$ یک تابع خوش

تعریف باشد.

تعریف ۱۰.۰.۲. فرمول $\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s,t)$، که دنباله‌ی ارضا کردن یک فرمول کراندار توسط یک ترم را بیان می‌کند، برابر

$$\begin{aligned}
&\mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s)\wedge\\
&\forall l<lh(t)\ \exists i,z,w\leq t\ \Bigg[[t]_l=\langle i,z,w\rangle\wedge i<lh(s)\ \wedge\ w\leq 1\wedge\\
&\Big[\{\exists u,u^{'}\leq s\big(\mathsf{term}(u)\wedge\mathsf{term}(u^{'})\wedge[s]_i=\ulcorner(u=u^{'})\urcorner\wedge\\
&\quad\big[w=1\leftrightarrow\mathsf{val}(u,z)=\mathsf{val}(u^{'},z)\big]\big)\}\\
&\vee\{\exists u,u^{'}\leq s\big(\mathsf{term}(u)\ \wedge\ \mathsf{term}(u^{'})\ \wedge\ [s]_i=\ulcorner(u<u^{'})\urcorner\wedge\\
&\quad\big(w=1\leftrightarrow\mathsf{val}(u,z)<\mathsf{val}(u^{'},z)\big)\big)\}\\
&\vee\{\exists j,k<i\big([s]_i=\ulcorner([s]_j\ \wedge\ [s]_k)\urcorner\wedge\\
&\exists l_1,l_2<l\quad\exists w_1,w_2\leq 1\big([t]_{l_1}=\langle j,z,w_1\rangle\ \wedge\ [t]_{l_2}=\langle k,z,w_2\rangle\\
&\qquad\qquad\wedge\ \big(w=1\leftrightarrow w_1=1\ \wedge\ w_2=1)\big)\big)\}\\
&\vee\{\exists j,k<i\ \ \big([s]_i=\ulcorner([s]_j\ \vee\ [s]_k)\urcorner\wedge\\
&\exists l_1,l_2<l\quad\exists w_1,w_2\leq 1\ \big([t]_{l_1}=\langle j,z,w_1\rangle\ \wedge\ [t]_{l_2}=\langle k,z,w_2\rangle\\
&\qquad\qquad\wedge\ \big(w=1\leftrightarrow w_1=1\ \vee\ w_2=1)\big)\big)\}\\
&\vee\{\exists j,i\ \ \big([s]_i=\ulcorner\neg[s]_j\urcorner\wedge\\
&\exists l_1<l\quad\exists w_1\leq 1\ \big([t]_{l_1}=\langle j,z,w_1\rangle\ \wedge\ \big(w=1\leftrightarrow w_1=0)\big)\big)\}\\
&\vee\{\exists j<i\ \ \exists k,u\leq s\ \big(\mathsf{term}(u)\ \wedge\ [s]_i=\ulcorner\exists v_k\big((v_k<u)\ \wedge\ [s]_j\big)\urcorner\wedge\\
&\forall\, r<\mathsf{val}(u,z)\ \ \exists l_1<l\ \ \exists w_1\leq 1\ ([t]_{l_1}=\langle j,z[r/k],w_1\rangle)\wedge\\
&\wedge\big(w=1\leftrightarrow\ \exists r<\mathsf{val}(u,z)\ \ \exists l_1<l([t]_{l_1}=\langle j,z[r/k],1\rangle)\big)\big)\}\\
&\vee\{\exists j<i\ \ \exists k,u\leq s\ \big(\mathsf{term}(u)\ \wedge\ [s]_i=\ulcorner\forall v_k\big(v_k<u\rightarrow[s]_j\big)\urcorner\wedge\\
&\forall\, r<\mathsf{val}(u,z)\ \ \exists l_1<l\ \ \exists w_1\leq 1\ ([t]_{l_1}=\langle j,z[r/k],w_1\rangle)\\
&\wedge\big(w=1\leftrightarrow\exists r<\mathsf{val}(u,z)\ \ \exists l_1<l\ ([t]_{l_1}=\langle j,z[r/k],1\rangle)\big)\big)\big)\}\Big]\Bigg]
\end{aligned}$$

بوده و $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ برابر فرمول زیر است:

$\exists s,t\ [\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s^\frown[x],t)\ \ \wedge\ \ \exists l<lh(t)\ ([t]_l=\langle lh(s),y,1\rangle)].$

در فرمول $\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s,t)$، t به عنوان کد برای دنباله‌ای از سه تایی $\langle i,z,w\rangle$ در نظر گرفته شده جایی که $i<lh(s)$ اندیسی برای دنباله کد شده توسط s است و w یک ارزش راستی است ($w=$ 0 برای نادرستی و $w=1$ برای درستی) از فرمول $[s]_i$ وقتی که متغییر های $v_0,v_1,\cdots$ توسط $[z]_0,[z]_1,\cdots$ تعبیر شده‌اند. چون $\mathsf{val}(u,z)$، $\mathsf{term}(u)$ و $\mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s)$ همه بازگشتی مقدماتی هستند پس $\mathsf{Satseq}_{\Delta_0}(s,t)$، Δ_1 فرمول است و بنابراین $\mathsf{Sat}_{\Delta 0}(x,y)$، Σ_1 فرمول است.

تعریف ۱۱.۰.۲. فرمول $s,t\ determins\ \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ عبارت است از:

$$\mathsf{Satseq}_{\Delta 0}(s,t)\ \wedge\ \exists l<lh(t)\ \ \exists i<lh(s)\ \ \exists w\leq 1([s]_i=x\ \wedge\ [t]_l=\langle i,y,w\rangle)$$

که بیان می‌کند که فرمول کراندار با گودل x به عنوان عضوی از دنباله‌ی سازنده‌ی فرمول کراندار s بوده و t دنباله‌ای است که اعضای آن ارزش درستی (۱) و نادرستی (۰) فرمول‌های کراندار عضو s را با ترم y در مقدار w مشخص می‌کنند.

استراتژی ما برای نشان دادن اینکه $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$، $\Delta_1(\mathtt{PA})$ باشد، همان روشی است که برای ترم x در بالا به کار گرفته شد.

نشان خواهیم داد که PA،

$$\exists s,t\ \big(s,t\ determines\ \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)\big)\ \forall\ x,y\ s.t.\ \mathsf{form}_{\Delta_0}(x)$$

را اثبات می‌کند، و اینکه برای هر دو زوج s,t و s',t' که تعیین کننده‌ی $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ هستند، دنباله‌های t و t' در صحت هر یک از زیرفرمول‌های x، با هم موافقت دارند.

لم ۱۲.۰.۲. PA *جمله‌ی زیر را ثابت می‌کند.*

$$\forall x,y\Big(\mathsf{form}_{\Delta_0}(x)\rightarrow\exists s,t\big(s,t\ determines\ \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x,y)\big)\Big)$$

برهان. فرض کنید x و y دلخواه باشند به طوری‌که $\mathsf{form}_{\Delta_0}(x)$ و فرض کنید s، فرمول

$\mathsf{formseq}_{\Delta_0}(s)$ را با $[s]_{lh(s)-1} = x$ ارضا کند. ما می‌توانیم t مناسبی با ستفاده از استقرا روی طول s بسازیم، اما برای مواردی که فرمول‌ها با استفاده از سورهای کراندار ساخته شده‌اند به استدلال استقرایی دوم نیاز خواهیم داشت. فرض کنید $\theta(i)$ فرمول زیر باشد

$$\forall m \leqslant i\ \forall y\ \exists t\ \{\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (m+1), t) \wedge\ lh(t) > 0\ \wedge$$
$$\exists l < lh(t)\ \exists w \leqslant 1([t]_l = \langle m, y, w\rangle)\}.$$

نشان خواهیم داد $\theta(i)$ برای هر $i < lh(s)$ توسط استقرا روی i برقرار است. فرض کنید $i < lh(s)$ و اگر $i > 0$، $\theta(i)$ طبق استقرا برقرار است. در این‌جا چند موضوع قابل بحث است.

(1) اگر $[s]_i = \ulcorner(u = u')\urcorner$ با $\mathsf{term}(u) \wedge \mathsf{term}(u')$ آنگاه $t = [\langle i, y, w\rangle]$، فرمول $\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (i+1), t)$ را ارضا می‌کند، جاییکه $w = 1$ اگر $\mathsf{val}(u, y) = \mathsf{val}(u', y)$ و در غیراینصورت $w = 0$ و از این رو t زیرفرمول داخل $\{\}$ در $\theta(i)$ را ارضا می‌کند. $[s]_i = \ulcorner(u < u')\urcorner$ نیز به طریق مشابه است و این دو برای $i = 0$ تنها احتمال‌ها هستند.

(2) اگر $[s]_i = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner$ برای بعضی $j, k < i$ فرض کنید t, t', l, l' و w, w' فرمول‌های

$$\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge [t]_l = \langle j, y, w\rangle$$

و

$$\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (k+1), t') \wedge [t']_{l'} = \langle y, y, w'\rangle$$

را ارضا کند که در آن $w, w' \leqslant 1$، $l < lh(t)$ و $l' < lh(t')$، و تمامی این اعداد از فرض استقرا به دست آمده‌اند. آنگاه $t'' = t \frown t' \frown [\langle ii, y, w''\rangle]$، فرمول $\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (i+1), t'')$ را ارضا می‌کند که $w'' = 1$ اگر $w = w' = 1$ و در غیر اینصورت $w'' = 0$. حالت‌های $[s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner$ و $[s]_i = \ulcorner\neg[s]_j\urcorner$ به طریق مشابه خواهند بود.

(3) اگر

$$[s]_i = \ulcorner\exists v_k\big((v_k < u) \wedge [s]_j\big)\urcorner \quad or \quad [s]_i = \ulcorner\forall v_k\big(\neg(v_k < u) \vee [s]_j\big)\urcorner,$$

برای به‌دست آوردن t لازم، از استدلال استقرایی دوم و فرض $\theta(i-1)$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $U = \mathsf{val}(u, y)$. می‌خواهیم از طریق استقرا روی p تا U ثابت کنیم که

$$\exists t[\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge lh(t) > 0$$
$$\wedge \forall q < p\ \exists l < lh(t)\ \exists w \leqslant 1\ ([t]_l = \langle j, y[q/k], w\rangle)].$$

این استقرای دوم بسیار ساده است. برای $p=0$، هر t را طوری در نظر بگیرید که $\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(j+1),t)$ با $[t]_l=\langle j,y[0/k],w\rangle$ برای بعضی w,l، با استفاده از فرض $\theta(i-1)$ برقرار باشد. مرحله‌ی استقرا به سادگی با قراردادن t' که $\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(j+1),t')$ را ارضا می‌کند و $[t']_l=\langle j,y[p+1/k],w\rangle$ برای l,w، به جای t که قبلاً به‌دست آمده، ثابت می‌شود. حال t را که فرمول موجود در [ ] را برای $p=U$ ارضا می‌کند، به‌دست آوردیم. به سادگی می‌توان بررسی کرد که

$\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(i+1),t\frown[\langle i,y,w\rangle])$

برای $w=0$ یا $w=1$ برقرار است. □

لم ۱۳.۰.۲. PA *جمله‌ی زیر را ثابت می‌کند.*

$$\forall s,t,s',t',i,i',l,l',w,w',y[\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s',t')\wedge$$
$$[s]_i=[s']_{i'}\wedge[t]_l=\langle i,y,w\rangle\wedge$$
$$[t']_{l'}=\langle i',y,w'\rangle\rightarrow w=w'].$$

برهان. با استقرا روی $max(l,l')$.

اگر $l=l'=0$، $[t]_l=\langle i,y,w\rangle$، $[t']_{l'}=\langle i',y,w'\rangle$ آنگاه $[s]_i$ و $[s']_{i'}$ باید اتمی باشند. یعنی به صورت $\ulcorner(u=u')\urcorner$ یا $\ulcorner(u<u')\urcorner$ برای ترم‌های u و u' باشد. علاوه‌براین اگر $[s]_i=[s']_{i'}$ آنگاه $[s]_i=\ulcorner(u=u')\urcorner=[s']_{i'}$ یا $[s]_i=\ulcorner(u<u')\urcorner=[s']_{i'}$ که u و u' به صورت یکتا توسط $[s]_i$ یا $[s']_{i'}$ با نوآری یکتای ترم‌ها و فرمول‌ها، تعیین شده‌اند. بنابراین

$w=1\Leftrightarrow\mathsf{val}(u,y)=\mathsf{val}(u',y)\Leftrightarrow w'=1$ در مورد اول و

$w=1\Leftrightarrow\mathsf{val}(u,y)<\mathsf{val}(u',y)\Leftrightarrow w'=1$ در مورد دوم برقرارند.

استدلال برای مرحله‌ی استقرا به چند مورد تقسیم می‌شود که ما دو مورد از آن را بررسی می‌کنیم. اگر $[t]_l=\langle i,y,w\rangle$، $[t']_{l'}=\langle i',y,w'\rangle$ و $[s]_i=[s']_{i'}$ آنگاه $[s]$ در تعداد محدودی راه ممکن متناظر با $\wedge,\vee,\neg,\exists$ یا $\forall$ ساخته شده‌است. فرض کنید $[s]_i=\ulcorner r_1\wedge r_2\urcorner$ که $r_1=[s]_{i_1}$ و $r_2=[s]_{i_2}$ برای $i_1,i_2<i$. آنگاه همچنین با قابلیت یگانه‌خوانی فرمول‌ها داریم $[s']_{i'}=\ulcorner r_1\wedge r_2\urcorner$ که $r_1=[s']_{i'_1}$ و $r_2=[s']_{i'_2}$ برای $i'_1,i'_2<i'$. علاوه‌براین وجود دارد $l_1,l_2<l$ و $l'_1,l'_2<l'$ و $w_1,w_2,w'_1,w'_2\leqslant 1$ به‌طوری‌که $[t]_{l_1}=\langle i_1,y,w_1\rangle$، $[t]_{l_2}=\langle i_2,y,w_2\rangle$، $[t']_{l'_1}=\langle i'_1,y,w'_1\rangle$ و $[t']_{l'_2}=\langle i'_2,y,w'_2\rangle$.

آنگاه طبق فرض استقرا $w_1 = w_1'$، $w_2 = w_2'$ و $w = 1$ اگروفقط اگر $w_1 = 1$ و $w_2 = 1$ اگروفقط اگر $w_1' = 1$ و $w_2' = 1$ اگروفقط اگر $w' = 1$، بنابراین $w = w'$.

حال فرض کنید که $[s]_i = \ulcorner \exists v_k((v_k < u) \wedge [s]_{i_1})\urcorner$ برای $i_1 < i$. آنگاه طبق قابلیت یگانه‌خوانی، $[s']_{i'} = \ulcorner \exists v_k((v_k < u) \wedge [s']_{i_1'})\urcorner$ که در آن $[s]_{i_1} = [s']_{i_1'}$، برای $i_1' < i'$.

فرض کنید $U = \mathsf{val}(u, y)$. از تعریف $\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s, t)$ داریم

$$w = 1 \Leftrightarrow \exists z < U \exists l_1 < l(\langle i_1, y[z/k], 1\rangle = [t]_{l_1}$$

و

$$w' = 1 \Leftrightarrow \exists z < U \exists l_1' < l'(\langle i_1', y[z/k], 1\rangle = [t']_{l_1'}$$

اما سپس نتیجه می‌شود که $w = 1$ اگروفقط اگر $1 = w'$، طبق فرض استقرا و از تعریف $\mathsf{satseq}_{\Delta_0}(s, t)$، ازاین‌رو $w = w'$. $\square$

قضیه ۱۴.۰.۲. *فرمول* $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$، $\Delta_1(\mathtt{PA})$ *است و* PA *ویژگی‌های زیر را ثابت میکند :*

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r = s)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathsf{val}(r, y) = \mathsf{val}(s, y)$$

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r < s)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathsf{val}(r, y) < \mathsf{val}(s, y)$$

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \wedge v)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \wedge \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$$

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \vee v)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \vee \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$$

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \neg u\urcorner, y) \leftrightarrow \neg\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$$

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \exists v_i((v_i < r) \wedge u)\urcorner, y) \leftrightarrow \exists x < \mathsf{val}(r, y)\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])$$

$$\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \forall v_i(\neg(v_i < r) \vee u)\urcorner, y) \leftrightarrow \forall x < \mathsf{val}(r, y)\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])$$

برای هر $y, i, r, s, , u, v$.

برهان. نشان دادن اینکه $\mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ فرمولی $\Sigma_1(\mathtt{PA})$ است، ساده است. همچنین $\Pi_1(\mathtt{PA})$ نیز هست، چون هم‌ارز است با

$$\begin{aligned}
&\mathsf{form}_{\Delta_0}(x) \wedge \\
&\quad \forall s, t(s, t\ \mathit{determines}\ \mathsf{Sat}_{\Delta_0}(x, y) \rightarrow \\
&\qquad \exists i < lh(s) \exists l < lh(t)([t]_l = \langle i, y, 1\rangle \wedge [s_i] = x)).
\end{aligned}$$

□

قضیه‌ی زیر در [۱۰] ثابت شده است:

قضیه ۱۵.۰.۲. *برای هر Δ_0 فرمول $\theta(v_0, \ldots, v_{n-1})$ با تنها متغیرهای آزاد $v_0, \cdots, v_{n-1}$ داریم:*

$$\forall x_0, \ldots, x_{n-1}, y\ [\theta(v_0, \ldots, v_{n-1}) \leftrightarrow \mathsf{sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta(v_0, \ldots, v_{n-1}) \urcorner, [x_0, \ldots, x_{n-1}] \frown y)].$$

فصل ۳

نمایش‌پذیری روابط و توابع

۱.۳ نمایش پذیری در نظریه‌ها

زبان حساب $L_A = \{0, s, +, \times, <\}$ بوده و نظریه‌ی T را گسترش شمارای کارآمدی از PA درنظر می‌گیریم. منظور از رابطه‌ی kـ تایی، یک زیر مجموعه‌ی $R \subseteq \mathbb{N}^k$ است.

۱.۱.۳ روابط

تعریف مناسبی برای نمایش‌پذیری یک رابطه روی اعداد طبیعی در یک نظریه، که زبان آن شامل ترم‌های $\bar{n}$ای است که هر $n \in \mathbb{N}$ را نشان می‌دهد، به صورت زیر می‌باشد:

تعریف ۱.۱.۳ (رابطه‌ی نمایش‌پذیر ضعیف). رابطه‌ی $R \subseteq \mathbb{N}$ را نمایش‌پذیر ضعیف در نظریه‌ی T گوییم هرگاه یک فرمول $\varphi(x)$ در زبان L موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$R(n) \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\bar{n}).$$

اگرچه تعریف قوی زیر بیشتر در ادبیات قضیه‌ی ناتمامیت استفاده شده است:

تعریف ۲.۱.۳ (رابطه‌ی نمایش‌پذیر). رابطه‌ی $R \subseteq \mathbb{N}$ را نمایش‌پذیر در نظریه‌ی T گوییم هرگاه یک فرمول $\varphi(x)$ در زبان L موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$R(n) \Rightarrow T \vdash \varphi(\bar{n})$$

و

$$\neg R(n) \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\bar{n}).$$

بدیهی است نمایش‌پذیری در یک نظریه‌ی سازگار بر نمایش‌پذیری ضعیف دلالت دارد، عکس آن برقرار نیست زیرا ممکن است رابطه‌ای در یک نظریه نمایش‌پذیر ضعیف باشد ولی نمایش‌پذیر نباشد:

مثال ۳.۱.۳ (نمایش‌پذیری ضعیف و نمایش‌ناپذیری اثبات‌پذیری)**.** فرض کنید $\mathsf{Prov}_{\mathtt{PA}}$ یک محمول اثبات‌پذیری برای حساب پئانو باشد. آنگاه برای هر فرمول φ داریم: $\mathtt{PA} \vdash \varphi$ اگر و فقط اگر $\mathtt{PA} \vdash \mathsf{Prov}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$، چون $\mathsf{Prov}_{\mathtt{PA}}$ یک Σ_1ـ فرمول و $\mathtt{PA}$، Σ_1ـ کامل و صحیح است. از طرف دیگر فرمول $\psi(x)$ای وجود ندارد به طوری‌که برای هر فرمول φ:

(۱) اگر $\mathtt{PA} \vdash \varphi$ آنگاه $\mathtt{PA} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ و

(۲) اگر $\mathtt{PA} \nvdash \varphi$ آنگاه $\mathtt{PA} \vdash \neg\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

چون در غیر اینصورت اثبات پذیری در $\mathtt{PA}$ تصمیم‌پذیر خواهد بود: برای فرمول φ با اجرای الگوریتم جستجوی برهان در $\mathtt{PA}$ برای فرمول‌های $\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ و $\neg\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ به صورت موازی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که $\mathtt{PA} \vdash \varphi$ (دقیقا وقتی $\mathtt{PA} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$) یا $\mathtt{PA} \nvdash \varphi$ (دقیقا وقتی که داشته باشیم $\mathtt{PA} \vdash \neg\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$) و این یک تناقض است (طبق قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل).

۲.۱.۳ توابع

برای توابع می‌توان چهار تعریف متفاوت در مورد نمایش‌پذیری در نظریه‌ها داشت.

تعریف ۴.۱.۳ (توابع نمایش‌پذیر ضعیف)**.** تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ در نظریه‌ی T نمایش‌پذیر ضعیف است، اگر برای یک فرمول $\varphi(x,y)$ و هر $n,m\in\mathbb{N}$ داشته باشیم:

(۱) اگر $f(n)=m$ آنگاه $T \vdash \varphi(\overline{n},\overline{m})$ و

(۲) اگر $f(n)\neq m$ آنگاه $T \nvdash \varphi(\overline{n},\overline{m})$.

تعریف ۵.۱.۳ (تابع نمایش‌پذیر). تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ در نظریه‌ی T نمایش‌پذیر است، اگر برای یک فرمول $\psi(x, y)$ و هر $n, m \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

(۱) اگر $f(n) = m$ آنگاه $T \vdash \psi(\overline{n}, \overline{m})$ و

(۲) اگر $f(n) \neq m$ آنگاه $T \vdash \neg\psi(\overline{n}, \overline{m})$.

تعریف ۶.۱.۳ (تابع قویاً نمایش‌پذیر). تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ در نظریه‌ی T قویاً نمایش‌پذیر است، اگر برای یک فرمول $\theta(x, y)$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

(۱) $T \vdash \theta(\overline{n}, \overline{f(n)})$

(۲) $T \vdash \forall y, z(\theta(\overline{n}, y) \wedge \theta(\overline{n}, z) \to y = z)$.

تعریف ۷.۱.۳ (تابع به‌طور اثبات‌پذیر تام). تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ در نظریه‌ی T به‌طور اثبات‌پذیر تام است، اگر برای یک فرمول $\eta(x, y)$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

(۱) $T \vdash \eta(\overline{n}, \overline{f(n)})$

(۲) $T \vdash \forall x \; \exists y \; (\eta(x, y) \wedge \forall z[\eta(x, z) \to y = z])$.

همچنین این تعاریف از بالا به پایین قوی‌تر می‌شوند.

حقیقت ۸.۱.۳ (در مورد مفاهیم نمایش‌پذیری). اگر T سازگار باشد و برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ متمایز، $i \neq j$ را اثبات کند آنگاه هر تابع اثبات‌پذیر تام، قویاً نمایش‌پذیر است، هر تابع قویاً نمایش‌پذیر، نمایش‌پذیر است و هر تابع نمایش‌پذیر، نمایش‌پذیر ضعیف با همان فرمول در نظریه‌ی T است.

لم ۹.۱.۳ (نمایش‌پذیری دلالت بر قویاً نمایش‌پذیری دارد.). *در نظریه‌ی T که می‌تواند جملات*

$$(1) \quad \forall y(y < \overline{n} \vee y = \overline{n} \vee \overline{n} < y)$$

و

$$(2) \quad \forall y(y < \overline{n} \to y = \overline{0} \vee ... \vee y = \overline{n-1}),$$

را برای هر $n \in \mathbb{N}$ اثبات کند، نمایش‌پذیری تابع، قویاً نمایش‌پذیری آن‌را نتیجه می‌دهد.

اگر f با $\psi(x, y)$ در T نمایش‌پذیر باشد، آنگاه فرض کنید $\theta(x, y)$ برابر با فرمول $\psi(x, y) \wedge \forall z < y \;\; \neg\psi(x, z)$ باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ به شرح زیر می‌توان نشان داد که

$T \vdash \theta(\overline{n}, \overline{f(n)})$ و $T \vdash \theta(\overline{n}, y) \to y = \overline{f(n)}$. علت در T: اگر $z < f(n)$ آنگاه طبق (2)، $z = \overline{i}$ برای یک $i < f(n)$. در حقیقت برای چنین iای داریم $\neg\psi(\overline{n}, \overline{i})$، بنابراین $\neg\psi(\overline{n}, z)$. اگر $\theta(\overline{n}, y)$ و $y \neq \overline{f(n)}$ آنگاه طبق (1)، $y < f(n)$ یا $f(n) < y$. در مورد اول برای $i < f(n)$، $y = \overline{i}$ و بنابراین با $\neg\psi(\overline{n}, \overline{i})$ داریم $\neg\psi(\overline{n}, y)$ که متناقض با $\theta(\overline{n}, y)$ است. در حالت بعدی با $\forall z < y \, \neg\psi(\overline{n}, z)$ باید داشته باشیم $\neg\psi(\overline{n}, \overline{f(n)})$ که این نیز تناقض است.

سوال اینکه قویاً نمایش‌پذیری بر اثبات‌پذیری تام دلالت می‌کند، در چاپ اول (۱۹۶۴) کتاب [۱۳] به نام مقدمه‌ای بر منطق ریاضی، به صورت باز مطرح شده بود. بعدها [۸] (در سال ۱۹۶۵) نشان داد که در واقع قویاً نمایش‌پذیری، اثبات‌پذیری تام را در پی دارد و این موضوع تمرین 3.35 در دومین چاپ (۱۹۷۹) همان کتاب و تمرین 3.32 در سومین چاپ (۱۹۸۷) بود. سپس بعد از چهارمین چاپ (۱۹۹۷) گزاره 3.12 بوده که همگی به دایسون [۱] نسبت داده شده بودند.

قضیه ۱۰.۱.۳ (قویاً نمایش‌پذیری، اثبات‌پذیری تام را نتیجه می‌دهد.). *اگر تابعی در یک نظریه قویاً نمایش‌پذیر باشد، آنگاه در همان نظریه کاملاً اثبات‌پذیر است.*

برهان. توجه کنید که ما برای نظریه هیچ شرطی نمی‌گذاریم؛ فرض کنید f توسط θ در نظریه‌ی T قویاً نمایش‌پذیر باشد. فرض کنید $\exists! u A(u)$ مخفف فرمول $\exists u (A(u) \wedge \forall v [A(v) \to v = u])$ باشد. قرار دهید $\eta(x, y) = [\exists! z \, \theta(x, z) \wedge \theta(x, y)] \vee [\neg\exists! z \, \theta(x, z) \wedge y = 0]$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $T \vdash \exists! y \, \theta(\overline{n}, y)$؛ بنابراین از $T \vdash \theta(\overline{n}, \overline{f(n)})$ داریم $T \vdash \eta(\overline{n}, \overline{f(n)})$، حال نشان می‌دهیم $T \vdash \forall x \, \exists! y \, \eta(x, y)$. علت در T: اگر $\exists! z \, \theta(x, z)$ آنگاه z منحصربفردی که $\theta(x, y)$ را ارضا می‌کند، $\eta(x, y)$ و $\forall u [\eta(x, u) \to u = z]$ را نیز ارضا می‌کند، جایی‌که $\exists! y \, \eta(x, y)$. اگر $\neg\exists! z \, \theta(x, y)$ آنگاه $y = 0$، y منحصربفردی است که $\eta(x, y)$ را ارضا می‌کند. $\square$

بنابراین (برای نظریه های Σ_1ــ کامل) هم ارزی‌های زیر را داریم:

کاملا اثبات‌پذیری $\Leftrightarrow$ قویاً نمایش‌پذیری $\Leftrightarrow$ نمایش‌پذیری $\Leftarrow$ نمایش‌پذیری ضعیف

[۱] V. H. Dyson

قضیه ۱۱.۱.۳ (نمایش‌پذیری ضعیف بر نمایش‌پذیری دلالت دارد.). *برای نظریه‌ی T فرض کنید فرمول $\mathsf{Proof}_T(z,x)$ تعیین می‌کند که z کد گودلی برهان فرمولی با کد گودلی x در T است و فرض کنید که T ویژگی‌های زیر را داراست:*

(i) $T \vdash \bar{i} \neq \bar{j}$ و $T \vdash \overline{n} \leqslant \overline{m}$ و $T \vdash \forall y(\overline{m} \leqslant y \to \overline{n} \leqslant y)$، *برای هر* $i,j,n,m \in \mathbb{N}$ *با* $i \neq j$ و $n \leqslant m$؛

(ii) $T \vdash \forall y(y \leqslant \overline{n} \vee \overline{n} \leqslant y)$ *برای هر* $n \in \mathbb{N}$؛

(iii) $T \vdash \forall y(y \leqslant \overline{n} \to \bigvee_{i=0}^{n} y = \bar{i})$ *برای هر* $n \in \mathbb{N}$؛

(iv) *اگر* $T \vdash \Phi$ *و* k *کد گودلی این برهان باشد آنگاه* $T \vdash \mathsf{Proof}_T(\overline{k}, \ulcorner\Phi\urcorner)$؛

(v) *اگر* k *کد گودلی برهانی از* Φ *در* T *نباشد آنگاه* $T \vdash \neg\mathsf{Proof}_T(\overline{k}, \ulcorner\Phi\urcorner)$، *در حالت خاص اگر* $T \nvdash \sigma$ *آنگاه* $T \vdash \neg\mathsf{Proof}_T(\bar{l}, \ulcorner\sigma\urcorner)$ *برای هر* $l \in \mathbb{N}$.

دراین‌صورت نمایش‌پذیری ضعیف تابع T، نمایش‌پذیری آن را در پی دارد.

برهان. فرض کنید تابع f توسط φ نمایش‌پذیر ضعیف در T باشد. برای (اثبات‌پذیری کراندار) فرض کنید $\varrho(z,x) = \exists u \leqslant z \ \ \mathsf{Proof}_T(u,x)$

$$\psi(x,y) = \exists z\big[\varrho(z, \ulcorner\varphi(x,y)\urcorner) \wedge \forall \overline{y} \leqslant z[\overline{y} \neq y \to \neg\varrho(z, \ulcorner\varphi(x,\overline{y})\urcorner)]\big] \,.$$

برای نشان دادن نمایش‌پذیری f توسط ψ در T، ثابت می‌کنیم که:

(1) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $T \vdash \psi\big(\overline{n}, \overline{f(n)}\big)$؛

(2) برای هر $n,m \in \mathbb{N}$ با $m \neq f(n)$ داریم $T \vdash \neg\psi(\overline{n}, \overline{m})$.

(1): فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ثابت باشد و $k \in \mathbb{N}$ کد گودلی برای برهان $T \vdash \varphi\big(\overline{n}, \overline{f(n)}\big)$ باشد؛ بنابراین $f(n) \leqslant k$. طبق (iv) داریم $T \vdash \mathsf{Proof}_T\Big(\overline{k}, \ulcorner\varphi\big(\overline{n}, \overline{f(n)}\big)\urcorner\Big)$ و بنابراین طبق (i) $T \vdash \varrho\Big(\overline{k}, \ulcorner\varphi\big(\overline{n}, \overline{f(n)}\big)\urcorner\Big)$. حال برای هر $i \in \mathbb{N}$ با $i \neq f(n)$ داریم $T \nvdash \varphi(\overline{n}, \bar{i})$ و طبق (v) برای هر $l \in \mathbb{N}$ داریم $T \vdash \neg\mathsf{Proof}_T\big(\bar{l}, \ulcorner\varphi(\overline{n}, \bar{i})\urcorner\big)$. در نتیجه طبق (iii) $T \vdash \neg\varrho\big(\bar{l}, \ulcorner\varphi(\overline{n}, \bar{i})\urcorner\big)$. علت در T: برای هر $\overline{y}$ که $y' \leqslant \overline{k}$ و $y' \neq \overline{f(n)}$، با استفاده از (iii)، برای برخی $j \leqslant k$ که $j \neq f(n)$، داریم $y' = \bar{j}$. برای هر چنین jای داریم $\neg\varrho\big(\overline{k}, \ulcorner\varphi(\overline{n}, \bar{j})\urcorner\big)$؛ و بنابراین طبق (iii)، $\forall y' \leqslant \overline{k}\Big[y' \neq y \to \neg\varrho\big(\overline{k}, \ulcorner\varphi(\overline{n}, y')\urcorner\big)\Big]$ برقرار است. همچنین $\psi\big(\overline{n}, \overline{f(n)}\big)$.

(2): قرار دهید $n,m \in \mathbb{N}$ که $m \neq f(n)$. توجه داشته باشیم که

$$\neg\psi(x,y) \equiv \forall z\Big[\varrho\big(z,\ulcorner\varphi(x,y)\urcorner\big) \to \exists y' \leqslant z\big[y' \neq y \wedge \varrho\big(z,\ulcorner\varphi(x,y')\urcorner\big)\big]\Big].$$

برای اثبات $T \vdash \neg\psi(\overline{n},\overline{m})$ نشان می‌دهیم که

$$T \vdash \forall z\Big[\varrho\big(z,\ulcorner\varphi(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big) \to \overline{f(n)} \leqslant z \wedge \overline{f(n)} \neq \overline{m} \wedge \varrho\Big(z,\ulcorner\varphi\big(\overline{n},\overline{f(n)}\big)\urcorner\Big)\Big].$$

فرض کنید k کد گودلی برهان $T \vdash \varphi\big(\overline{n},\overline{f(n)}\big)$؛ بنابراین $f(n) \leqslant k$. همچنین از $T \nvdash \varphi(\overline{n},\overline{m})$ برای هر $l \in \mathbb{N}$ داریم $T \vdash \neg\varrho\big(\overline{l},\varphi\ulcorner(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big)$. علت در T: طبق (ii) برای هر z، یا (الف) $z \leqslant \overline{k}$ یا (ب) $\overline{k} \leqslant z$.

(الف): اگر $z \leqslant \overline{k}$ آنگاه طبق (iii) برای $i \leqslant k$ داریم $z = \overline{i}$. حالا، از $\neg\varrho\big(\overline{i},\ulcorner\varphi(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big)$ نتیجه می‌گیریم که

$$\varrho\big(\overline{i},\ulcorner\varphi(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big) \to \overline{f(n)} \leqslant \overline{i} \ \wedge\ \overline{f(n)} \neq \overline{m} \ \wedge\ \varrho\Big(\overline{i},\ulcorner\varphi\big(\overline{n},\overline{f(n)}\big)\urcorner\Big);$$

همچنین $\neg\psi(\overline{n},\overline{m})$.

(ب): اگر $\overline{k} \leqslant z$ آنگاه طبق (i) که بر $\overline{f(n)} \neq \overline{m}$ نیز دلالت دارد،داریم $\overline{f(n)} \leqslant z$.

از طرفی، $\mathsf{Proof}_T\big(\overline{k},\ulcorner\varphi(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big)$ و بنابراین $\exists u \leqslant z\ \mathsf{Proof}_T\big(u,\ulcorner\varphi(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big)$،

یا معادلاً $\varrho\big(z,\ulcorner\varphi(\overline{n},\overline{m})\urcorner\big)$. در نتیجه داریم: $\overline{f(n)} \leqslant z \wedge \overline{f(n)} \neq \overline{m} \wedge \varrho\Big(z,\ulcorner\varphi\big(\overline{n},\overline{f(n)}\big)\urcorner\Big)$

پس $\neg\psi(\overline{n},\overline{m})$.

□

به یاد داشته باشیم که هر نظریه‌ی Σ_1ــ کامل و به خصوص حساب متناهیا اصل‌پذیر رابینسون (بسیار ضعیف) تمامی شرایط (i) ــ (v) در قضیه فوق را ارضا می‌کند.

۲.۳ سیستم‌های صوری حساب

تمایل عمومی ریاضیات قرن بیستم بر روی کارکردن در نظریه‌های صوری بود که تصور می‌شد می‌توانند کمابیش خواص اشیاء مورد مطالعه را بیان کنند. از نقطه‌نظر صوری ما زمانی می‌توانیم تابعی را محاسبه‌پذیر در نظر بگیریم که یک سیستم صوری داشته باشیم که بتواند آن را نمایش دهد؛ یعنی به ما اجازه دهد که ثابت کنیم مقادیر عددی توابع همان‌هایی هستند که تابع آن‌ها را محاسبه می‌کند (و نه چیز دیگر).

قطعا رویکرد هربراند[۲] ـ گودل به محاسبه‌پذیری بدین روش تعلق دارد ولی سیستم‌های صوری که برای منظورهای متفاوت ساخته شده بودند از نقطه‌نظر ریاضی و حساب غیرطبیعی به‌نظر می‌رسند، همینطور λ ـ تعریف‌پذیری نیز غیرطبیعی است. چون ما توابع حسابی را در نظر می‌گیریم پس طبیعی است که بررسی کنیم کدام توابع در سیستم‌های منطقی حسابی (به عنوان مثال در حساب پئانو) نمایش‌پذیرند. ما این مسئله را با یک روش کلی یعنی مشخص کردن شرایط کمینه‌ی کافی (که بعداً معلوم خواهند شد که بسیار ضعیفند) برای نمایش دادن هر تابع بازگشتی، حل خواهیم نمود. در اینجا هر سیستم صوری ما قادر خواهد بود که هر عدد طبیعی n را با یک ترم $\overline{n}$ نمایش دهد.

۱.۲.۳ درجات نمایش‌پذیری

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید که سیستم صوری F و تابع f داده شده باشند، می‌گوییم:

(1) f در F با فرمول φ از زبان F، نمایش‌پذیر ضعیف است هرگاه

$$f(x_1, ..., x_n) = y \iff F \vdash \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

(2) f در F با فرمول φ نمایش‌پذیر است هرگاه

$$f(x_1, ..., x_n) = y \implies F \vdash \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

$$f(x_1, ..., x_n) \neq y \implies F \vdash \neg\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

(3) f در F با فرمول φ قویاً نمایش‌پذیر است هرگاه f با φ نمایش‌پذیر باشد و همچنین شرط منحصربفردی زیر برقرار باشد:

$$F \vdash (\forall y)(\forall z)\left[\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, y) \wedge \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, z) \rightarrow y = z\right].$$

رابطه‌ی بین مفاهیم مختلف: اگر f در سیستم صوری F قویاً نماش‌پذیر باشد آنگاه نمایش‌پذیر نیز است، و اگر f در یک سیستم صوری نمایش‌پذیر باشد آنگاه نمایش‌پذیر ضعیف است (چون اگر F سازگار باشد و $F \vdash \neg\varphi$ آنگاه $F \nvdash \varphi$).

[۲] Herbrand

گزاره ۲.۲.۳. *اگر F با $<$ یک سیستم صوری سازگار باشد که اصول زیر را ارضا می‌کند*

(1) $\neg(x < \overline{0})$

(2) $x < \overline{n+1} \ \leftrightarrow\ x = \overline{0} \vee ... \vee x = \overline{n}$

(3) $x < \overline{n} \ \vee\ x = \overline{n} \ \vee\ \overline{n} < x$

آنگاه هر تابع نمایش‌پذیر در F قویاً نمایش‌پذیر است.

برهان. فرض کنید ψ، f در F را نمایش دهد. آنگاه فرمول

$$\varphi(x_1, ..., x_n, y) \Leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n, y) \wedge (\forall z < y)\ \neg\psi(x_1, ..., x_n, z)$$

نمایش قوی f است. همچنین :

- اگر $f(x_1, ..., x_n) = y$ آنگاه $f(x_1, ..., x_n) \neq z$، برای هر $z < y$. طبق نمایش‌پذیری f با ψ

$$F \vdash\ \neg\psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{0}) \wedge ... \wedge \neg\psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x_n}, \overline{y-1}) \wedge \psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y}).$$

اصول (1) و (2) (بر این اساس که $y = 0$ یا $y > 0$) در اولین قسمت فرمول، $z < \overline{y}$ را حفظ می‌کنند. بنابراین

$$F \vdash\ \psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y}) \wedge (\forall z < \overline{y})\ \neg\psi(x_1, ..., x_n, z)$$

(اگر $y = 0$ باشد، قسمت دوم به انتفاء مقدم درست است، چون هیچ $z < \overline{y}$ وجود ندارد) و

$$F \vdash \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

- اگر $f(x_1, ..., x_n) \neq y$ آنگاه، طبق نمایش‌پذیری،

$$F \vdash\ \neg\psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

و بنابراین

$$F \vdash\ \neg\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{y}).$$

- برای نشان دادن شرط منحصربفردی، ثابت می‌کنیم که

$$F \vdash\ (\forall y) \left[\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, y)\ \leftrightarrow\ y = \overline{f(x_1, ..., x_n)}\right].$$

از اولین قسمت اثبات داریم

$$F \vdash \ \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{f(x_1, ..., x_n)}).$$

حالا فرض کنید

$$F \vdash \ \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, y).$$

طبق اصل (3) تنها حالات ممکن عبارتند از

$$y < \overline{f(x_1, ..., x_n)} \ \vee \ y = \overline{f(x_1, ..., x_n)} \ \vee \ \overline{f(x_1, ..., x_n)} < y.$$

رابطه‌ی اول رد می‌شود چون از

$$F \vdash \ \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, \overline{f(x_1, ..., x_n)})$$

داریم

$$F \vdash \ \neg\psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, y)$$

به طوری‌که از

$$F \vdash \ \neg\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, y)$$

داریم

$$F \vdash \ \psi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n, y)$$

و F صحیح است. به طور مشابه

$$\overline{f(x_1, ..., x_n)} < y$$

را نیز رد می‌کنیم. بنابراین

$$y = \overline{f(x_1, ..., x_n)}.$$

پس اثبات تمام است. $\square$

تعریف ۳.۲.۳. برای سیستم صوری F و رابطه‌ی R داریم:

(1) R نمایش‌پذیر ضعیف است اگر برای یک φ،

$R(x_1, ..., x_n) \ \Leftrightarrow \ F \vdash \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n).$

(2) R نمایش‌پذیر است اگر برای برخی φ،

$R(x_1, ..., x_n) \ \Rightarrow \ F \vdash \varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$

$\neg R(x_1, ..., x_n) \ \Rightarrow \ F \vdash \neg\varphi(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$

توجه داشته باشیم که اگر $\varphi(x_1, ..., x_n, z)$ نمایش (ضعیف) تابع مشخصه‌ی c_R از R باشد، آنگاه $\varphi(x_1, ..., x_n, \overline{1})$ نمایش (ضعیف) R می‌باشد. بنابراین اگر F طوری باشد که

$x \neq y \ \Rightarrow \ F \vdash \ \neg(\overline{x} = \overline{y})$

و $\varphi(x_1, ..., x_n)$ نمایش R باشد، آنگاه c_R توسط

$\big(\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge z = \overline{1}\big) \ \vee \ \big(\neg\varphi(x_1, ..., x_n) \wedge z = \overline{0}\big)$

نمایش‌پذیر (قویاً) است. توجه داشته باشید که اصول حتی برای نمایش‌پذیری ساده‌ی c_R نیز لازم هستند، چون وقتی $c_R(x_1, ..., x_n) \neq z$ و $z \neq 0, 1$ باید بدانیم $\overline{z} \neq \overline{0}, \overline{1}$ تا بتوانیم نتیجه بگیریم فرمولی که نمایش c_R خواهد بود، اثبات‌پذیر نیست.

۳.۲.۲ سیستم‌های صوری که توابع بازگشتی را نمایش می‌دهند

توجه داشته باشید که اگر $f(x_1, ..., x_n) = \mu y R(x_1, ..., x_n, y)$ آنگاه

$f(x_1, ..., x_n) = y \ \Leftrightarrow \ R(x_1, ..., x_n, y) \wedge (\forall z < y)\neg R(x_1, ..., x_n, z).$

پس اصول گزاره‌ی قبل (۳.۲.۲) نتیجه می‌دهند که قویاً نمایش‌پذیری توابع تحت μـ عملگر بسته هستند. حال سراغ حالت دیگری می‌رویم.

گزاره ۳.۲.۴. *اگر F یک سیستم صوری باشد که*

$m \neq n \Rightarrow F \vdash \ \neg(\overline{m} = \overline{n})$

آنگاه توابع قویاً نمایش‌پذیر در F تحت ترکیب بسته هستند.

برهان. فرض کنید $f(\vec{x}) = g\big(h_1(\vec{x}), ..., h_m(\vec{x})\big)$ و g و h_i به ترتیب توسط χو ψ_i نمایش‌پذیر هستند. آنگاه f توسط

$\varphi(\vec{x}, y) \ \Leftrightarrow \ (\exists y_1)...(\exists y_m)\big[\psi_1(\vec{x}, y_1) \wedge ... \wedge \psi_m(\vec{x}, y_m) \wedge \chi(y_1, ..., y_m, y)\big]$

قویاً نمایش‌پذیر خواهد بود .

- اگر $f(\vec{x}) = y$ فرض کنید $h_i(\vec{x}) = y_i$ و $g(y_1, ..., y_m) = y$، بنابراین $F \vdash \psi_i(\vec{\overline{x}}, \overline{y}_i)$ و $F \vdash \chi(\overline{y}_1, ..., \overline{y}_m, \overline{y})$. آنگاه $F \vdash \varphi(\vec{\overline{x}}, \overline{y})$ و $F \vdash \varphi\big(\vec{\overline{x}}, \overline{f(\vec{x})}\big)$.
- اگر $F \vdash \varphi(\vec{\overline{x}}, y)$ فرض کنید $y_1, ..., y_m$ طوری باشند که

$$F \vdash \psi_1(\vec{\overline{x}}, y_1) \wedge ... \wedge \psi_m(\vec{\overline{x}}, y_m) \wedge \chi(y_1, ..., y_m, y).$$

طبق قویاً نمایش‌پذیری باید $y_i = \overline{h_i(\vec{x})}$ باشد و بنابراین

$$y = \overline{g\big(h_1(\vec{x}), ..., h_m(\vec{x})} = \overline{f(\vec{x})}.$$

$\square$

حال می‌توانیم نتیجه‌گیری خود را در مورد اصولی که نمایش‌پذیری برای هر تابع بازگشتی را ممکن می‌کند، انجام دهیم.

تعریف ۵.۲.۳. یک تابع جزئی، بازگشتی جزئی است اگر بعد از متناهی مرحله طبق قوانین زیر تولید شود:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & Z(x) = 0 \\
(2) & S(x) = x + 1 \\
(3) & P_i^n(x_0, \cdots, x_{n-1}) \\
(4) & F(\mathbf{x}) = G\big(H_0(\mathbf{x}), \cdots H_{m-1}(\mathbf{x})\big) \\
(5) & \begin{cases} F(0, \mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) \\ F(\mathbf{x}+1, \mathbf{x}) = H\big(F(\mathbf{x}, \mathbf{x})\big) \end{cases} \\
(6) & F(\mathbf{x}) \simeq \mu y\big[G(\mathbf{x}, y) = 0\big]
\end{array}
$$

که در (6) فرض می‌کنیم G یک تابع $n+1$ـتایی تام باشد و در (4) و (6)، $\mathbf{x}$ نمایش‌گر $x_0, \cdots, x_{n-1}$ و در (5) نمایش‌گر $x_1, \cdots, x_n$ است. اگر تابع F توسط قوانین بالا به وجودآید تام است، آنگاه F یک تابع بازگشتی کلی یا ساده‌تر، تابع بازگشتی نامیده می‌شود.

قضیه ۶.۲.۳. *در هر سیستم صوری F با محمول $<$ و توابع $+$ و $\cdot$ که اصول زیر را ارضا می‌کنند، هر تابع بازگشتی نمایش‌پذیر (قوی) است (و بنابراین، اگر سیستم صحیح باشد، نمایش‌پذیر ضعیف نیز هست):*

B1 $\neg(\overline{x} = \overline{y}), for\ x \neq y$

B2 $x < \overline{n}\ \vee\ x = \overline{n}\ \vee\ \overline{n} < x$

B3 $\neg(x < \overline{0})$

B4 $x < \overline{n+1}\ \leftrightarrow\ x = \overline{0}\ \vee \ldots \vee\ x = \overline{n}$

B5 $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$

B6 $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$

برهان. از مشخصه‌سازی توابع بازگشتی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم از **B1** بسته بودن تحت ترکیب و از **B2** − **B4** بسته بودن تحت μـ بازگشتی بدست می‌آید.کافیست توجه داشته باشیم که:

- تساوی نمایش‌پذیر است چون اگر $x = y$ آنگاه بدیهی است که $F \vdash \overline{x} = \overline{y}$، و اگر $x \neq y$ آنگاه طبق **B1** داریم $F \vdash\ \neg\overline{x} = \overline{y}$. بنابراین تابع مشخصه‌اش نیز نمایش‌پذیر است.

- جمع توسط $\varphi(x, y, z)\ \Leftrightarrow\ x + y = z$ نمایش‌پذیر است. همچنین اگر $x + y = z$ آنگاه $F \vdash \overline{x+y} = \overline{z}$ و (طبق **B5**) $F \vdash \overline{x} + \overline{y} = \overline{z}$، یعنی $F \vdash \varphi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

- ضرب نیز بطور مشابه توسط $\varphi(x, y, z)\ \Leftrightarrow\ x \cdot y = z$ نمایش‌پذیر است.

- بدیهی است که I^n_i توسط $\varphi(x_1, ..., x_n, z) \Leftrightarrow z = x_i$ نمایش‌پذیر است.

□

اصول **B1** تا **B6** نظریه‌ی R با نامتناهی اصول را تعریف میکنند. [۱۸] نشان داد که R متناهیا اصل‌پذیر نیست، چون هر زیرمجموعه‌ی متناهی از اصول (و بنابراین، طبق فشردگی، هر مجموعه‌ی متناهی از قضایا) یک مدل متناهی طبیعی را می‌پذیرد که شامل اعداد مرتب $\{0, 1, ..., n\}$ می‌باشدو

دارای عملیات محدود شده به ارزش برابر با n است وقتی ارزش اصلی از آن می‌گذرد. البته که R نمی‌تواند مدل متناهی داشته باشد (طبق **B1**) و بنابراین قابل تقلیل به مجموعه‌ی متناهی از قضایا نیست. این موضوع همچنین ثابت می‌کند که هر قضیه‌ی بسته‌ی R در برخی مدل متناهی درست است و بنابراین قدرت R بسیار محدود است. اگرچه گسترش قضیه‌ی قبل ممکن است، همان‌طور که [۱۹] و [۹] نشان داده‌اند. حتی با حذف **B2** و **B5** نیز، نتیجه‌گیری برقرار است. علاوه بر این با تغییر زبان و کاهش محمول از $<$ به $\leq$ ممکن است **B2** تا **B4** به دو اصل زیر تقلیل یابند

$$x \leqslant \overline{n} \ \ \vee \ \overline{n} \leqslant x$$

$$x \leqslant \overline{n} \leftrightarrow x = \overline{0} \ \vee ... \vee \ x = \overline{n}$$

حساب رابینسون گسترشی از R است، و بنابراین مثالی است از یک نظریه با اصول متناهی که در آن هر تابع بازگشتی، نمایش‌پذیر است. آنگاه تابعی بازگشتی وجود دارد که قویاً نمایش‌پذیر نیست. رابینسون ثابت که اگر هرکدام از اصول Q حذف شوند، آنگاه تابعی بازگشتی وجود دارد که قویاً نمایش‌پذیر نیست. بنابراین Q کوچکترین نظریه با اصول متناهی است که در آن هر تابع بازگشتی، قویاً نمایش‌پذیر است.

۳.۳ حساب مرتبه اول

حساب بخشی جدایی ناپذیر از تمام شاخه‌های ریاضیات است. زبان حساب توانایی بیان ویژگی‌های ماهیت متفاوت چیزهای متناهی را دارد. به خصوص موضوع‌های زیادی در نظریه محاسبه در قالب حساب می‌توان مطالعه نمود. به علت فعالیت بنیادی ددکند و پئانو در اواخر قرن ۱۹، حساب موضوع اصلی تحقیقات در زمینه منطق و بنیادهای ریاضیات بوده است.

۱.۳.۳ زبان حساب

وقتی می‌گوییم حساب، معمولا دو اثر اصلی از نمادهای توابع دوتایی یعنی + و · برای جمع و ضرب و یک نماد تابع یکتایی یعنی s برای تالی و ثابت 0 را فرض می‌کنیم. سپس علامت = را برای تساوی داریم.

تعریف ۱.۳.۳. مدل استاندارد حساب، مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است که نمادهای آن به صورت ساختار $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, s, 0, = \rangle$ است.

هر عدد $n \in \mathbb{N}$ نامی در زبان حساب دارد. عدد $\underline{n}$ ترم $\Big(\big(...(s0)...\big)s\Big)s$ با n بار s است. به خصوص $\underline{0}$ به سادگی 0 است.

نظریه‌ی مرتبه اول $\mathbf{Th}(\mathbf{N})$ از مدل استاندارد، حساب کامل نامیده می‌شود.

۲.۳.۳ نمایش‌پذیری و توابع بازگشتی اثبات‌پذیر

حال دو ویژگی از توابع را که قوی‌تر از حسابی بودن هستند، در نظر می‌گیریم. نه تنها می‌خواهیم توابع در مدل استاندارد تعریف‌پذیر باشند، بلکه می‌خواهیم در PA (یا هر نظریه‌ی دیگری) ثابت کنیم که فرمول مناسب در حقیقت یک تابع را تعریف می‌کند.

در تعریف زیر، نماد $\exists!$ باید به عنوان «دقیقا یک مورد وجود دارد» خوانده شود. $\exists! a\varphi(a)$ خلاصه‌ی $\exists a\Big(\varphi(a) \wedge \forall b\big(\varphi(b) \to a = b\big)\Big)$ است.

تعریف ۲.۳.۳. یک تابع جمعی kـ تایی f روی $\mathbb{N}$ در PA نمایش‌پذیر است اگر و فقط اگر فرمول $\varphi(\vec{a}, b)$ با $k+1$ متغیر آزاد $\vec{a}$ و b وجود داشته باشد که :

(1) از $f(\vec{n}) = m$ داریم $\mathtt{PA} \vdash \varphi(\underline{\vec{n}}, \underline{m})$، برای هر $\vec{n}, m \in \mathbb{N}$.

(2) $\mathtt{PA} \vdash \exists! b\ \varphi(\underline{\vec{n}}, b)$، برای هر $\vec{n} \in \mathbb{N}$.

تابعی در PA قویاً نمایش‌پذیر است، اگر (1) برقرار باشد و

(3) $\mathtt{PA} \vdash \forall \vec{a}\ \exists! b\ \varphi(\vec{a}, b)$.

گزاره ۳.۳.۳. *هر تابع نمایش‌پذیر، قویاً نمایش‌پذیر است*

برهان. فرض کنید تابع f توسط φ نمایش‌پذیر باشد، آنگاه f توسط فرمول زیر قویاً نمایش‌پذیر است: $\psi(\vec{a}, b) = \big(\exists! c\ \varphi(\vec{a}, c) \ \wedge\ \varphi(\vec{a}, b)\big) \ \vee\ \big(\neg\exists! c\ \varphi(\vec{a}, c) \ \wedge\ b = 0\big)$ همچنین اگر $f(\vec{n}) = m$ آنگاه $\exists! b\ \varphi(\underline{\vec{a}}, b)$ و $\varphi(\underline{\vec{n}}, \underline{m})$ هر دو اثبات‌پذیر هستند، وقتی $\mathtt{PA} \vdash \psi(\underline{\vec{n}}, \underline{m})$. برای اینکه نشان دهیم $\mathtt{PA} \vdash \forall \vec{a}\ \exists! b\ \psi(\vec{a}, b)$ با $\mathtt{PA} \vdash v \ \vee\ \neg v$ که $v = \exists! c\ \varphi(\vec{a}, c)$ است، شروع

می‌کنیم. علاوه بر این داریم $\mathtt{PA} \vdash v \to \exists! b\ \big(v\ \wedge\ \varphi(\vec{a}, b)\big)$ و $\mathtt{PA} \vdash \neg v \to \exists! b\big(\neg v\ \wedge\ b = 0\big)$.
بنابراین $\mathtt{PA} \vdash \exists! b\big(v\ \wedge\ \varphi(\vec{a}, b)\big)\ \vee\ \exists! b\big(\neg v\ \wedge\ b = 0\big)$ وقتی $\mathtt{PA} \vdash \exists! b\psi$، چون این دو با هم متناقض‌اند. $\square$

قضیه ۴.۳.۳. *گودل*

یک تابع در PA نمایش‌پذیر است اگر و فقط اگر بازگشتی باشد.

برهان. قسمت مستقیم ساده است: اگر تابع f نمایش‌پذیر باشد، آنگاه می‌توانیم برای هر n، $f(n)$ای با یک جستجوی برهان جامع پیدا کنیم. عکس این مطلب در قضیه‌ی 6.2.3 ثابت شده است. $\square$

فصل ۴

حساب اساساً تصمیم‌ناپذیر رابینسون

۱.۴ انواع نظریه‌ی اساساً تصمیم‌ناپذیر رابینسون

کبهام مشاهده کرد که (به نقل از [۱۹]) نظریه‌ی اساساً تصمیم‌ناپذیر [۱] شناخته شده‌ی رافائل رابینسون[۲] به نام $\mathcal{R}$، با حذف اصل $x \leqslant \overline{n} \vee \overline{n} \leqslant x$ نیز اساساً تصمیم‌ناپذیر باقی می‌ماند. توجه داشته باشیم که اساساً تصمیم‌ناپذیری سیستم بستگی به زبان نظریه دارد. نظریه‌ای اساساً تصمیم‌ناپذیر با زبانی که فقط شامل ضرب، کوچکتری و تساوی است را ارایه می دهیم.

۱.۱.۴ کمینگی زیرنظریه کُبهام

نظریه‌ی $\mathcal{R}$ اساساً تصمیم‌ناپذیر شناخته شده‌ی رافائل رابینسون بر پایه‌ی ۵ اصل زیر است:

(1) $\overline{n}+\overline{p}=n+p$

(2) $\overline{n}\cdot\overline{p}=n\cdot p$

(3) $\overline{n}\neq\overline{p}\ \ for\ \ n\neq p$

---

[۱] یعنی نظریه‌ای که هر گسترش شمارای کارآمد آن تصمیم‌ناپذیر است.

[۲] Raphael M. Robinson

$$(4) \qquad x \leqslant \overline{n} \to x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}.$$

$$(5) \qquad x \leqslant \overline{n} \ \vee \ \overline{n} \leqslant x.$$

در نسخه‌ی اصلی ثوابت 0، s، + و · هستند. نماد $\overline{n}$ بیانگر nامین عدد است که به صورت بازگشتی توسط

$$\overline{0} = 0, \qquad \overline{n+1} = S\overline{n},$$

تعریف شده است و $\alpha \leqslant \beta$ معادل $(\exists w)(w + \alpha = \beta)$ است، جایی‌که w متغیری است که نه در α و نه در β است. همچنین اساساً تصمیم‌ناپذیر است اگر ثابت S حذف شده و به جای آن ثوابت $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots$ قرار بگیرند و اگر $\leqslant$ به عنوان رابطه‌ی دوتایی در زبان، به جای تعریف شدن در ترم‌های +، در نظر گرفته شده باشد. همچنین برهان در [4] که هر تابع بازگشتی در R تعریف‌پذیر است، فقط باید با جابجا کردن $Su = v$ و $u + 1 = v$ به عنوان فرمول تعریف کننده‌ی تابع تالی، تغییر کند.

کبهام مشاهده کرد که نظریه‌ی $\mathcal{R}_0$ نیز بر اساس چهار اصل اول اساساً تصمیم‌ناپذیر است. همچنین R در $\mathcal{R}_0$ قابل تفسیر است، برای اینکه اگر قرار دهیم

$$x \leqslant' y \leftrightarrow \Big\{\big[0 \leqslant y \wedge (\forall u)(u \leqslant y \wedge u \neq y \to u + 1 \leqslant y)\big] \to x \leqslant y\Big\},$$

آنگاه $\leqslant'$، (4) و (5) را ارضا می‌کند (همچنین با تغییرات بیشتر $\leqslant$، می‌توان اصل قوی‌تر $x \leqslant y \vee y \leqslant x$ را نیز ثابت کرد). سیستم مبتنی بر اصول (1)، (2)، (3) و (4) اساساً تصمیم‌ناپذیر کمینه است، به این معنی که اگر یکی از این اصول حذف شود آنگاه به راحتی نظریه‌ی نتیجه‌گیری اساساً تصمیم‌ناپذیر نخواهد بود [۱۹]. اما اگر $\leqslant$ به عنوان ثابت محمول بازگشتی به جای تعریف شدن در ترم‌های + گرفته شود آنگاه دیگر اساساً تصمیم‌ناپذیر نخواهد بود، یک گسترش کامل تصمیم‌پذیر داده شده توسط نظریه‌ای از حقایق با $y \leqslant x$، همیشه نادرست تعریف شده است. اگر (4) به $(4')$ تقویت شود:

$$(4)' \qquad x \leqslant \overline{n} \ \leftrightarrow \ x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n},$$

آنگاه نظریه‌ی اساساً تصمیم‌ناپذیر (به نام $\mathcal{R}_0'$) برای $\leqslant'$ تعریف‌شده در بالا، که (4) و (5) را ارضا می‌کند. بنابراین $\mathcal{R}$ در $\mathcal{R}'$ قابل تفسیر است. توجه کنید که هرگاه $>$ مثل بالا در ترم‌های + جمع تعریف شود، آنگاه $(4)'$ از (4) و (1) نتیجه خواهد شد. اگرچه این نظریه، $\mathcal{R}_0'$ اساساً تصمیم‌ناپذیر کمینه نیست زیرا می‌توان (1) را حذف کرد.

قضیه ۱.۱.۴. *نظریه‌ی $\mathcal{R}_1$ بر اساس سه اصل زیر اساساً تصمیم‌ناپذیر است:*

$$(2) \qquad \overline{n} \cdot \overline{p} = \overline{n \cdot p}$$

$$(3) \qquad \overline{n} \neq \overline{p} \;\; for \;\; n \neq p$$

$$(4)' \qquad x \leqslant \overline{n} \leftrightarrow x = \overline{0} \vee \cdots \vee x = \overline{n}.$$

برهان. در اینجا $\leqslant'$ محمول ثابت تعریف نشده‌ی بازگشتی و ... $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2},$ به عنوان ثوابت دلخواه در نظر گرفته می‌شوند. طبق تعریف [۱۶] از جمع بر حسب ضرب و تالی استفاده خواهیم کرد. فرض کنید (2)، (3) و $(4)'$ ارضا شده باشند، آنگاه می‌توانیم + را که (1) را ارضا میکند، به شرح ذیل تعریف کنیم. ابتدا رابطه‌ی تالی توسط

$$y = x+1 \leftrightarrow (x = \overline{0} \wedge y = \overline{1}) \vee (x = \overline{1} \wedge y = \overline{2}) \vee \big(x < y \leqslant x^2 \wedge \neg\exists z(x < z < y)\big),$$

و سپس جمع توسط

$$x + y = z \leftrightarrow (z = \overline{0} \rightarrow x = y = \overline{0}) \wedge z \leqslant (x+1) \cdot (y+1) \;\wedge$$
$$(xz+1) \cdot (yz+1) = (xy+1)z^2 + 1.$$

در اینجا $z \leqslant (x+1) \cdot (y+1)$ مخفف $\forall u \, \forall v[u = x+1 \wedge v = y+1 \rightarrow z \leqslant u \cdot v]$ است.

کروشه بعدی نیز به طور مشابه تعبیر می‌شود. کران‌های y و zبرای یکتایی تابع لازم است چون برای اثبات $(\forall y)[y = \overline{n}+1 \leftrightarrow y = \overline{n+1}]$ به اثبات $(\forall z)[z = \overline{n}+\overline{p} \leftrightarrow z = \overline{n+p}]$ نیاز داریم.

چون ما می‌توانیم اصل (1) را برای + ثابت کنیم، پس همه‌ی توابع بازگشتی در $\mathcal{R}_1$ تعریف‌پذیر هستند بنابراین این نظریه اساساً تصمیم‌ناپذیر است. در حقیقت $\mathcal{R}'_0$ و بنابراین $\mathcal{R}$ در $\mathcal{R}_1$ قابل تعبیر هستند.

اما، همانطور که ابتدا توسط دایسون [۸] مشاهده شده است، با تعریف رابطه‌ی جدید $z = x \oplus y$، طبق

$$z = x \oplus y \leftrightarrow \big(z = x+y \wedge (\exists! z)(z = x+y) \vee z = \overline{0} \wedge \neg(\exists! z)(z = x+y)\big)$$

خواهیم توانست که جمله‌ی زیر را ثابت کنیم:

$$(\forall z)(z = \overline{n}+\overline{p} \leftrightarrow z = \overline{n} \oplus \overline{p})$$

نظریه حاصل $(\mathcal{R}_1)$ براساس سه اصل (2)، (3) و $(4)'$ در معنای فوق، اساساً تصمیم‌ناپذیر کمینه است [۱۹]. □

مراجع

[1] Stephen A. Cook, *Computability and Logic*, **Lecture Notes** (Fall 2008) Available On `http://www.cs.toronto.edu/~sacook/csc438h/`.

[2] William Craig, *On Axiomatizability Within a System*, **Journal of Symbolic Logic** 18:1 (1953) 30–32.

[3] Henri-Alex Esbelin & Malika More, *Rudimentary Relations and Primitive Recursion: A Toolbox*, **Theoretical Computer Science** 193:1-2 (1998) 129–148.

[4] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme, I.*, **Monatshefte für Mathematik und Physik** 38:1 (1931) 173–198. Translated as *"On Formally Undecidable Propositions of* Principia Mathematica *and Related Systems, I."*, in: S. Feferman et al. (eds.), **Kurt Gödel Collected Works, Volume I: Publications 1929–1936**, Oxford University Press (1986) pp. 135–152.

[5] Peter Hájek & Pavel Pudlák, **Metamathematics of First-Order Arithmetic**, Springer (2nd print 1998).

[6] Shawn Hedman, **A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity**, Oxford University Press (2004).

[7] Peter G. Hinman, **Fundamentals of Mathematical Logic**, A K Peters / CRC Press (2005).

[8] Verena Esther Huber-Dyson, *On the Strong Representability of Number-Theoretic Functions*, **Hughes Aircraft Company Research Report**, Fullerton, Californa, USA (1965) pp. 1–5.

[9] James P. Jones & John C. Shepherdson, *Variants of Robinson's Essentially Undecidable Theory* R, **Archive for Mathematical Logic** 23:1 (1983) 61–64.

[10] Richard W. Kaye, **Models of Peano Arithmetic**, Oxford University Press (1991).

[11] Stephen C. Kleene, *General Recursive Functions of Natural Numbers*, **Mathematische Annalen** 112:1 (1936) 727–742.

[12] Stephen C. Kleene, **Introduction to Metamathematics**, North–Holland (1952).

[13] Elliott Mendelson, **Introduction to Mathematical Logic**, (1st ed. D. van Nostrand Co. 1964), (2nd ed. D. van Nostrand Co. 1979), (3rd ed. The Wadsworth & Brooks/Cole 1987), (4th ed. Chapman & Hall 1997), (5th ed. CRC Press 2009), (6th ed. CRC Press 2015).

[14] Piergiorgio Odifreddi, **Classical Recursion Theory: The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers**, Volume I, North–Holland (1992).

[15] Wolfgang Rautenberg, **A Concise Introduction to Mathematical Logic**, Springer (3rd ed. 2010).

[16] Julia Robinson, *Definability and Decision Problems in Arithmetic*, **Journal of Symbolic Logic** 14:2 (1949) 98–114.

[17] Barkley Rosser, *Extensions of Some Theorems of Gödel and Church*, **Journal of Symbolic Logic** 1:3 (1936) 87–91.

[18] Alfred Tarski & Andrzej Mostowski & Raphael M. Robinson, **Undecidable Theories**, North–Holland (1953).

[19] Robert L. Vaught, *On a Theorem of Cobham Concerning Undecidable Theories*, in: Ernest Nagel & Patrick Suppes & Alfred Tarski (eds.), **Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceeding of the 1960 International Congress**, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 44, North–Holland (1966) pp. 14–25.

[20] S. A. Volkov, *On the Class of Skolem Elementary Functions*, **Journal of Applied and Industrial Mathematics** 4:4 (2010) 588–599.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات‌پذیر	Provable
اثبات‌پذیری	Provability
استدلال	Argument
استقرا	Induction
استلزام	Implication
استنتاج	Inference
اکیداً	Strictly
بازگشتی	Recursive
برهان	Proof
پارادوکس	Paradox
تابع	Function
ترکیب عطفی	Conjuction
ترکیب فصلی	Disjunction
تصدیق کننده، ارضا کننده	Satisfying
تصمیم‌ناپذیری	Undecidability
تمام‌سازی	Completion
تمامیت	Completeness
تناقض	Contradiction

جایگزینی .... Substitution
جمله مستقل .... Independent Statement
حساب .... Arithmetic
حسابی .... Arithmetical
درستی .... Truth
زبان .... Language
زوج، دوتایی .... Pair
سازگار .... Consistent
سلسله مراتب .... Hierarchy
سور .... Quantifier
شرایط .... Conditions
صوری .... Formal
صوری‌سازی .... Formalized
عدد گودل .... Gödel Number
عنصر .... Element
فرمول .... Formula
قضیه .... Theorem
کران‌دار .... Bounded
متغیر .... Variable
مخالف، معکوس .... Contrary
ناسازگار .... Inconsistent
ناتمامیت .... Incompleteness
نتیجه .... Conclusion
نظریه .... Theory
هم‌ارز .... Equivalent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

استدلال	Argument
حساب	Arithmetic
حسابی	Arithmetical
کراندار	Bounded
تمامیت	Completeness
تمام‌سازی	Completion
شرایط	Conditions
ترکیب عطفی	Conjuction
نتیجه	Conclusion
سازگار	Consistent
تناقض	Contradiction
معکوس، مخالف	Contrary
ترکیب فصلی	Disjunction
عنصر	Element
هم‌ارز	Equivalent
صوری	Formal
صوری‌سازی	Formalized
فرمول	Formula

Function .... تابع
Gödel Number .... عدد گودل
Hierarchy .... سلسله مراتب
Implication .... استلزام
Incompleteness .... ناتمامیت
Inconsistent .... ناسازگار
Independent statement .... جمله مستقل
Induction .... استقرا
Inference .... استنتاج
Language .... زبان
Pair .... زوج، دوتایی
Paradox .... پارادوکس
Proof .... برهان
Provable .... اثبات‌پذیر
Provability .... اثبات‌پذیری
Quantifier .... سور
Recursive .... بازگشتی
Satisfying .... ارضاپذیری
Strictly .... اکیداً
Substitution .... جایگزینی
Theorem .... قضیه
Theory .... نظریه
Truth .... درستی
Undecidability .... تصمیم‌ناپذیری
Variable .... متغیر

Surname: Rokni **Name:** Elaheh

Title: Bounded Relations and their Relation to Primitive Recursive Relations

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Hazhir Homei

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2018 **Number of Pages:** 48

Keywords: Primitive Recursive, Representability, Provability, Arithmetical theories, Incompleteness.

Abstract

Gödel introduced the primitive recursive functions in his well-known article on the incompleteness theorems, and used them for arithmetizing the syntax. Most of the syntactic concepts definable by bounded formulas are primitive recursive. But the converse of this statement is not true, though this is not mentioned in many books and papers and even some books have false claims about it. In this thesis we provide an elementary proof for the fact that a primitive recursive relation is not necessarily definable by bounded formulas.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Bounded Relations and their Relation to Primitive Recursive Relations

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Hazhir Homei

By

Elaheh Rokni

2018